

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М.В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Отделение радиофизики, кафедра акустики

Заикин Алексей Анатольевич

Шумоиндуцированные фазовые переходы  
и управление турбулентностью в затопленных  
струях акустическим воздействием

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор П.С. Ланда

МОСКВА 1997

## Оглавление

0.1	Введение . . . . .	3
<b>Глава 1. Турбулентность и когерентные структуры в дозвуковой затопленной струе</b>		<b>17</b>
1.1	Струя как усилитель гидродинамических и акустических возмущений. Переход к турбулентности в струе. . .	19
1.2	Взаимодействие гидродинамических и акустических волн в струе. Управление турбулентностью в струях акустическим воздействием . . . . .	26
1.3	Эволюция спектров пульсаций скорости в струе . . . . .	31
<b>Глава 2. Шумоиндуцированные колебания в маятнике со случайно колеблющейся осью подвеса</b>		<b>39</b>
2.1	Теоретическое рассмотрение колебаний маятника, вызванных случайными колебаниями оси подвеса . . . . .	40
2.2	Результаты численного моделирования уравнения колебаний маятника с колеблющейся осью подвеса . . . . .	45
2.3	Критерий Рытова–Диментберга . . . . .	58
2.4	Возбуждение колебаний маятника со случайно колеблющейся осью подвеса как шумоиндуцированный фазовый переход. Критерий Климонтовича об упорядоченности движения . . . . .	61
2.5	Переमेжаемость типа "Включено-выключено" в модели маятника со случайно колеблющейся осью подвеса . . .	64
<b>Глава 3. Управление шумоиндуцированными колебаниями и аналогия между шумоиндуцированными колебаниями маятника со случайно колеблющейся осью подвеса и турбулентными процессами в струях</b>		<b>69</b>
3.1	Возбуждение и усиление колебаний маятника низкочастотным гармоническим воздействием . . . . .	71

3.2	Подавление колебаний в маятнике высокочастотным воздействием . . . . .	76
3.3	Синхронизация колебаний в маятнике внешним воздействием . . . . .	80
3.4	Аналогия между шумоиндуцированными колебаниями маятника со случайно колеблющейся осью подвеса и турбулентными процессами в струях . . . . .	86
<b>Глава 4. Шумоиндуцированные и хаотические колебания в модели детских эпидемий, вызванные сезонными изменениями степени контакта</b>		<b>91</b>
4.1	Периодическое и случайное изменение степени контакта	94
4.2	Различение шумоиндуцированных и хаотических колебаний в SEIR модели . . . . .	98
4.3	Синхронизация шумоиндуцированных колебаний в SEIR модели . . . . .	102
<b>Основные результаты и выводы</b>		<b>106</b>

## 0.1 Введение

Известно, что при малых скоростях потока течение жидкости является ламинарным, а при больших — турбулентным [71, 17, 2]. Явление турбулентности и связанное с нею возникновение крупномасштабных когерентных структур в потоках жидкости и газа исследуется уже более ста лет. Понимание природы турбулентности важно не только с чисто научной точки зрения, но и для практических целей, так как оно может дать возможность эффективного управления турбулентностью. К настоящему времени накоплено большое количество экспериментальных данных по турбулентности в струях, трубах, каналах, и.т.п., в частности показана возможность управления интенсивностью турбулентных пульсаций в струе внешним акустическим воздействием. Однако удовлетворительной теории возникновения турбулентности до сих пор еще не построено. Долгое время в физике господствовала концепция Л.Д. Ландау [11], которой придерживалось большинство исследователей, занимающихся турбулентностью. Согласно концепции Ландау турбулентность возникает следующим образом. Сначала из-за неустойчивости состояния равновесия, соответствующего ламинарному течению, возбуждаются колебания на одной частоте. Для амплитуды этих колебаний Ландау записал феноменологическое уравнение, которое по существу является укороченным уравнением Ван-дер-Поля. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса последовательно появляются все новые и новые периоды, которым соответствуют движения все более мелких масштабов. В результате устанавливаются многочастотные колебания с несоизмеримыми частотами, которым в фазовом пространстве соответствует многомерный тор. При большом количестве частот такое квазипериодическое движение по своему виду весьма напоминает случайный процесс. Несмотря на то, что теория Ландау является феноменологической и не следует непосредственно из уравнений гидродинамики, она долгое время не подвергалась сомнению и поддерживалась почти всеми исследователями турбулентности. Дальнейшее развитие теория Ландау получила в работах Дж. Стюарта

[4, 5, 6, 7], который предложил способ расчета коэффициентов, входящих в уравнения Ландау, основанный на приближенном решении уравнения Навье–Стокса. Однако, задаваемая Стюартом форма приближенного решения в виде  $A(\epsilon t)e^{i(\omega t - kx)}$  не корректна с физической точки зрения. Действительно, это решение описывает периодическую в пространстве волну с заданным волновым числом  $k$ , амплитуда которой медленно изменяется во времени. Строго говоря, такое решение справедливо лишь для кольцевого потока длины  $L = 2\pi n/k$ , где  $n$  — целое число, т.е. для потока с обратной связью. Решение, задаваемое Стюартом, не учитывало конвективный характер неустойчивости ламинарного течения.

В 70-х годах, в связи с открытием динамического хаоса стал распространяться предложенный Рюэлем и Такенсом взгляд на развитие турбулентности как на скачкообразное возникновение в фазовом пространстве странного аттрактора [8, 9]. Таким образом, возникновение турбулентности трактовалось как переход к динамическому хаосу. В частности, эти взгляды неоднократно высказывались Ю.И. Неймарком, что нашло, в частности, отражение в книге [101]. Такие же представления изложены в последних изданиях книг Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица "Гидродинамика" [71] и А.С. Моница и А.М. Яглома "Статистическая гидромеханика" [17]. Нужно заметить, что обе концепции по существу основывались на представлении о турбулентности как об автоколебаниях. Такого же взгляда о турбулентности придерживался и Г.С. Горелик, как следует из воспоминаний Рытова [66]. Основываясь на представлении о турбулентности как об автоколебаниях, группой авторов был опубликован ряд работ по моделированию процесса развития турбулентности в виде цепочки генераторов с однонаправленной связью [14, 15] и использованию таких характеристик, как корреляционная размерность аттрактора, для количественного описания турбулентных потоков [10].

В то же время конвективный характер неустойчивости в струе и других незамкнутых потоках, при котором возмущение, хотя и усиливается, но сносится вниз по потоку, приводит к заключению, что возникаю-

щая там турбулентность не является автоколебательным процессом<sup>1)</sup>). Заметим также, что косвенным свидетельством того, что турбулентность в незамкнутых потоках не является автоколебаниями, может служить численный эксперимент Н.В. Никитина [69] по моделированию турбулентного течения в трубах конечной длины. В силу указанных соображений недавно была высказана гипотеза [18, 63, 64, 123], что турбулентность, возникающая в незамкнутых потоках жидкости, не является автоколебаниями, а представляет собой результат шумоиндуцированного фазового перехода, и потому к ней не применимы все описанные выше подходы. Возмущения же неизбежно присутствуют во всех реальных системах как за счет случайного изменения внешних условий (так называемые технические флуктуации), так и за счет внутренних причин (естественные флуктуации), обусловленных молекулярной структурой среды. В уравнения гидродинамики эти возмущения могут быть включены как внешние случайные силы, величина которых, в общем случае, зависит от переменных, описывающих состояние системы. Расчет сил, обусловленных естественными флуктуациями в гидродинамических потоках, на основе флуктуационно-диссипационной теоремы выполнен Ю.Л. Климонтовичем [103].

Если коэффициент усиления какого-либо усилителя достаточно мал, то наличием флуктуаций можно пренебречь и считать, что сигнал на выходе усилителя обусловлен лишь сигналом на его входе. В гидродинамических же течениях коэффициент усиления, как правило, является достаточно большим. В этом случае наличие флуктуаций является принципиальным, так как именно они определяют, по нашему мнению, наблюдаемые турбулентные возмущения. Отсюда следует, что подход к исследованию турбулентности, как и к обычным усилителям с большим коэффициентом усиления, в рамках теории динамических систем, без учета флуктуаций, не является адекватным. За счет усиленных флуктуаций в системе может возникнуть некоторый фазовый переход, при котором она перейдет в качественно новое состояние. Можно полагать, что возникновение турбулентности, характеризуемой наличием

---

<sup>1)</sup>Этот факт отмечен также в книге [16].

крупномасштабных, в высокой степени регулярных структур, на фоне мелкомасштабных случайных движений, как раз и представляет собой такой переход [87]. Согласно Ю.Л. Климонтвичу [103, 60, 61] при переходе от ламинарного течения к турбулентному система переходит в более упорядоченное состояние. Увеличение степени упорядоченности движения системы обусловлено тем, что при развитии турбулентности все большая часть энергии хаотического движения молекул переходит в энергию относительно более упорядоченного движения крупномасштабных вихрей. Аналогичный результат, как будут показано ниже, получается для маятника: согласно критерию Климонтвича при возбуждении шумоиндуцированных колебаний маятника система переходит в более упорядоченное состояние. Это подтверждает в какой-то мере высказанные соображения о переходе к турбулентности как о шумоиндуцированном фазовом переходе.

Для более детального обоснования указанной выше гипотезы о природе турбулентности были проанализированы результаты эксперимента по измерению пульсаций скорости в турбулентной струе термоанемометрическим методом, полученные сотрудниками Государственного научно-исследовательского центра ЦАГИ. Результаты эксперимента опубликованы в [36], описаны и проанализированы в Главе 1 настоящей работы, где высказаны соображения, позволившие прийти к гипотезе, что возникновение турбулентности в незамкнутых потоках является результатом шумоиндуцированного фазового перехода.

Исследование любой из известных математических моделей турбулентной струи с учетом флуктуаций является чрезвычайно сложной задачей. Поэтому возникла необходимость изучить явление шумоиндуцированного фазового перехода, используя наиболее простые модели, подобно тому как явление автоколебаний, как правило, изучается на примере простейшего генератора, описываемого уравнением Ван-дер-Поля. Было выбрано две таких модели, представляющих собой самостоятельный интерес: “классическая” в теории колебаний модель маятника со случайно колеблющейся осью подвеса и эпидемиологическая модель, описывающая сезонные изменения количества заболеваний та-

кими детскими болезнями как ветрянка, корь, свинка и краснуха.

В последнее время исследованию шумоиндуцированных переходов разного рода уделяется большое внимание [1, 23, 85, 86, 117]. Эти переходы, хотя и являются неравновесными, аналогичны равновесным фазовым переходам второго рода, поскольку некоторые свойства, характеризующие равновесный фазовый переход, были обнаружены и в этих явлениях [41, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52].

Шум может индуцировать фазовые переходы различного рода. В книге [1] основное внимание уделено переходам, когда шумом индуцируется мультистабильность в системе, обычно бистабильность, которая сопровождается качественным изменением функции распределения. При этом в функции распределения появляются дополнительные максимумы и система переходит в качественно новое состояние. В работах [23, 85, 86, 117] наблюдался шумоиндуцированный фазовый переход в конечно-разностной модели распределенной системы, заключающийся в появлении постоянной составляющей переменных системы (среднего поля). При этом никаких дополнительных пиков в распределении вероятности не возникало. В настоящей работе рассмотрен шумоиндуцированный фазовый переход, заключающийся в параметрическом возбуждении колебаний маятника за счет случайной вибрации его оси подвеса. Этот переход по своей сути подобен рассмотренному в работах [23, 85, 86, 117].

Интересной проблемой, затронутой в данной работе, является проблема различения шумоиндуцированных и хаотических колебаний при анализе экспериментальных данных. Общепринятым является расчет корреляционной размерности процесса [101, 93, 94, 125]. Описание различных методов расчета корреляционной размерности и соответствующие ссылки можно найти в [42]. Однако расчеты, проведенные в настоящей работе, показали, что несмотря на случайность колебаний, корреляционная размерность шумоиндуцированных колебаний в маятнике оказывается конечной. Таким образом расчет корреляционной размерности не обеспечивает надежного метода различения. Поэтому для различения указанных типов колебаний было предложено использо-

вать критерий Рытова-Диментберга, впервые предложенный для различения шума, прошедшего через фильтр, и зашумленных автоколебаний. На примере рассматриваемых систем показано, что этот критерий позволяет различить также шумоиндуцированные и хаотические колебания динамической природы.

Другим интересным эффектом является возможность управления шумоиндуцированными колебаниями. В настоящей работе было обнаружено, что при низкочастотном воздействии происходит усиление колебаний, тогда как при высокочастотном их подавление. Таким образом, внешним воздействием можно изменять амплитуду шумоиндуцированных колебаний. Этот эффект аналогичен управлению турбулентностью в струях акустическим воздействием. При резонансном воздействии была обнаружена синхронизация шумоиндуцированных колебаний в смысле захвата средней частоты. Явление синхронизации известно давно и очень интенсивно изучалось. Обзор проблемы можно найти в [53].

Вторая рассмотренная в работе система, представляющая собой известную эпидемиологическую модель [159], дополняет исследование маятника тем, что в ней принципиально шум входит как аддитивным, так и мультипликативным образом. Это приводит к ряду новых эффектов. Модель включает в себя четыре компоненты и описывается тремя связанными нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка. Модель призвана объяснить сезонные изменения количества детских инфекций. Для этого в нее вводится зависящий от времени параметр, характеризующий сезонные изменения степени контакта здоровых детей с инфицированными. При численном моделировании уравнений модели в ряде работ (см., к примеру, [163, 164]) предполагалось, что степень контакта изменяется гармонически с периодом в один год. Было показано, что при определенных значениях параметров решение уравнений имеет хаотический характер, подобный тому, который известен из медицинских данных. Однако очевидно, что гармоническое изменение степени контакта не может отражать реальных условий. Поэтому мы предположили, что степень контакта

представляет собой случайный процесс, спектр которого имеет максимум на частоте, соответствующей одному году. Интересно, что возбуждаемые при этом колебания внешне весьма похожи на те, которые получены в указанных выше работах. Это говорит о том, что как периодическое изменение степени контакта, так и случайное переводит систему в качественно новое состояние, определяемое главным образом внутренними свойствами самой системы. Несмотря на внешнюю схожесть процессов, вызванных периодическими и случайными изменениями степени контакта, они различаются в первую очередь тем, что при периодическом изменении в спектре присутствует дискретные составляющие (что не наблюдается в случае маятника). Кроме того, различить эти колебания можно при помощи указанного выше критерия Рытова-Диментберга.

Высказанные выше соображения определили цель диссертации и задачи численных исследований.

Таким образом, цель работы состояла в исследовании шумоиндуцированных фазовых переходов в ряде простых систем и анализе экспериментальных данных по турбулентности в струях с целью подтверждения указанной выше гипотезы о природе турбулентности и анализа характера управления турбулентностью в затопленных струях акустическим воздействием.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения.

Первая глава посвящена описанию процессов, происходящих в дозвуковых затопленных струях. Проведен анализ экспериментальных данных, полученных и предоставленных сотрудниками Государственного научно-исследовательского центра ЦАГИ по измерению скорости турбулентных пульсаций в дозвуковой затопленной воздушной струе термоанемометрическим методом. Приводятся аргументы, позволяющие предположить, что турбулентность в незамкнутой струе - это не автоколебания, а результат шумоиндуцированного фазового перехода. Главным аргументом в поддержку этой гипотезы служит конвективный характер неустойчивости Кельвина-Гельмогольца, имеющей место на границе струи, при котором возмущение, возникающее в струе,

усиливаясь, сносится вниз по потоку. За счет этой неустойчивости при достаточно больших числах Рейнольдса в слое смешения струи возбуждаются и усиливаются так называемые гидродинамические волны. Эти волны могут распространяться только вниз по потоку со скоростью порядка скорости струи. Таким образом, струя является усилителем возмущений с достаточно большим коэффициентом усиления. Это является причиной того, что ролью флуктуаций, естественных и технических, нельзя пренебречь при рассмотрении струи. Естественно предположить, что именно эти усиленные флуктуации и вызывают фазовый переход в струе, переход, связанный с турбулизацией струи и появлением качественно нового состояния — крупномасштабных когерентных структур.

Одним из интересных проявлений нелинейных эффектов в струе является возможность заметного подавления или усиления гидродинамических пульсаций в струе слабым периодическим воздействием на той или другой частоте. При этом подавление турбулентных пульсаций в струе имеет место, если частота периодического воздействия достаточно высока, тогда как усиление происходит при сравнительно низкой частоте периодического воздействия. Таким образом, имеется возможность управления турбулентностью в струе внешним акустическим воздействием. Нужно заметить, что в струе происходит интенсивное взаимодействие гидродинамических и акустических волн (последние рождаются при отражении гидродинамических волн от какого-либо препятствия или неоднородности и распространяются вверх по потоку). Особенно этот эффект хорошо иллюстрируется самовозбуждением звука в так называемых импактных струях, когда струя падает на экран. В свободной же струе акустические волны рождаются на неоднородностях, вызванных турбулентностью. Ударяясь о кромку сопла, акустические волны преобразуются в гидродинамические. Таким образом, в струе возникает нелинейная обратная связь. Именно преобразование акустических волн в гидродинамические делает струю столь чувствительной к акустическому облучению.

В первой главе также описана эволюция формы и спектров колеба-

ний в струе при удалении от сопла, а значит, при увеличении интенсивности флуктуаций в струе. При этом исчезает имеющаяся в начале струи перемежаемость турбулентных пульсаций. Случайный характер гидродинамических волн проявляет себя, в частности, в непрерывности спектров пульсаций скорости в струе. Внутри начального участка струи эти спектры имеют резонансный характер. Эксперименты показывают, что частота, соответствующая максимуму спектра, постепенно убывает с увеличением расстояния до сопла. Подобная эволюция спектра имеет место и для шумоиндуцированных колебаний маятника при увеличении интенсивности вибрации оси подвеса.

Вторая глава посвящена исследованию шумоиндуцированного фазового перехода в маятнике со случайно колеблющейся осью подвеса. Применяя метод Крылова-Боголюбова для стохастических уравнений можно показать, что при увеличении интенсивности вибрации должно происходить возбуждение колебаний маятника, подобно тому как это имеет место при гармоническом параметрическом воздействии. Этот процесс можно рассматривать как неравновесный фазовый переход второго рода, причем в качестве параметра порядка можно выбрать среднее значение мгновенной амплитуды колебаний или ее квадрата.

К сожалению, аналитическое рассмотрение, справедливое только в непосредственной близости от порога возбуждения колебаний, не дает представления о форме шумоиндуцированных колебаний при удалении от порога. Поэтому уравнение маятника со случайно колеблющейся осью подвеса было исследовано численным способом. Интересно заметить, что переход к возбуждению шумоиндуцированных колебаний происходит через перемежаемость типа "включено-выключено", то есть существуют участки конечной длины, где маятник находится в маленькой окрестности положения равновесия, и участки, где амплитуда колебаний имеет заметную величину. При увеличении интенсивности вибрации оси подвеса средняя длительность первых участков уменьшается, а вторых увеличивается.

Шумоиндуцированные колебания в маятнике внешне похожи на хаотические, которые можно получить при гармоническом периодическом

воздействии на маятник в определенном диапазоне параметров. В литературе господствует убеждение, что эти колебания можно отличить друг от друга, вычислив корреляционную размерность соответствующего аттрактора: для хаотических колебаний динамического происхождения она должна быть конечной и сравнительно небольшой, а для колебаний, вызванных шумом, бесконечной (на практике, это означает, что не должно происходить насыщения корреляционной размерности при увеличении размерности пространства вложения). Однако в работе показано, что в случае шумоиндуцированных колебаний корреляционная размерность также оказывается конечной, т.е. она не может служить критерием различения этих видов колебаний. Неожиданно оказалось, что известный в теории колебаний критерий Рытова–Диментберга, предложенный авторами для различения шума, прошедшего через фильтр, и зашумленных автоколебаний, позволяет различить указанные два типа колебаний. Численные расчеты показали, что в случае шумоиндуцированных колебаний плотность распределения вероятности для квадрата мгновенной амплитуды является монотонно спадающей функцией, тогда как в случае хаотических колебаний динамической природы спад плотности вероятностей не является монотонным.

Показано, что возбуждение шумоиндуцированных колебаний в маятнике представляет собой переход от менее упорядоченного к более упорядоченному состоянию с точки зрения критерия, предложенного Ю.Л. Климонтовичем. Этот результат можно трактовать следующим образом: при увеличении превышения над порогом возбуждения относительно все большая доля энергии действующего шума переходит в энергию более упорядоченного движения маятника.

В третьей главе исследуется влияние дополнительно гармонического воздействия, как аддитивного так и мультипликативного, на колебания маятника. Показано, что при низкочастотном гармоническом воздействии возможно либо возбуждение колебаний, если интенсивности шума нехватает для их возбуждения в отсутствие дополнительного воздействия, либо интенсификация уже существующих шумоин-

дуцированных колебаний. При этом колебания, индуцированные дополнительным низкочастотным гармоническим воздействием, и колебания, индуцированные только шумом, практически оказываются неразличимыми, что свидетельствует о том, что после фазового перехода, почти независимо от того, чем он вызван, вступают в игру внутренние свойства системы, которые и определяют вид возбуждаемых колебаний. Высокочастотное дополнительное воздействие приводит к подавлению шумоиндуцированных колебаний, аналогично подавлению турбулентных пульсаций в струе при высокочастотном акустическом воздействии.

Показана возможность синхронизации шумоиндуцированных колебаний в том смысле, что средняя частота колебаний, посчитанная с помощью преобразования Гильберта, приблизительно становится равной частоте внешнего периодического воздействия в определенном интервале частот этого воздействия.

Таким образом, показана возможность управления шумоиндуцированными колебаниями: их амплитудой при нерезонансном воздействии и частотой при резонансном.

В этой главе рассмотрена также аналогия между поведением шумоиндуцированных колебаний в маятнике и турбулентными пульсациями в струе. В первую очередь обращает на себя внимание схожесть эволюции спектров колебаний при увеличении интенсивности шума в маятнике и при удалении от сопла в струе. В обеих системах происходит интенсификация колебаний при низкочастотном воздействии и их подавление при высокочастотном. При этом схожи амплитудно-частотные характеристики при высокочастотном воздействии, что позволят даже дать практические рекомендации по параметрам воздействия для более эффективного подавления турбулентности в струях. И в струе, и в маятнике при высокочастотной фильтрации колебаний наблюдается перемежаемость типа “включено–выключено” даже в случае, если ее не было до фильтрации.

В четвертой главе исследована модель, описывающая динамику детских эпидемий при сезонных изменениях степени контакта между здо-

ровыми и инфицированными детьми. В отличие от других работ здесь предполагается, что степень контакта изменяется со временем случайным образом, но так, что максимальная частота спектра соответствует интервалу в 1 год. Исследование этой модели дополняет исследование шумоиндуцированных колебаний маятника, потому что в рассматриваемом маятнике шум является только мультипликативным, а в данной модели — как мультипликативным, так и аддитивным. Последнее обстоятельство приводит к значительной разнице в поведении обеих систем.

За счет присутствия аддитивной составляющей шума точка фазового перехода расплывается: среднее значение мгновенной амплитуды колебаний увеличивается плавно с увеличением интенсивности шума. Однако, если искусственно исключить аддитивную составляющую, то в указанной зависимости появляется излом, что свидетельствует о возникновении шумоиндуцированного фазового перехода второго рода.

Как и для маятника, использован критерий Рытова–Диментберга для различения шумоиндуцированных колебаний и хаотических колебаний, возникающих при гармоническом изменении степени контакта.

Показана возможность синхронизации шумоиндуцированных колебаний как внешним воздействием, так и при взаимодействии двух различных популяций.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

Таким образом, на защиту выносятся следующие положения:

1. Существует глубокая аналогия в поведении турбулентных струй и маятника со случайно колеблющейся осью подвеса и в управлении шумоиндуцированными колебаниями в маятнике дополнительным гармоническим воздействием и управлении турбулентностью в дозвуковых затопленных струях внешним акустическим воздействием. На основе аналогии можно дать некоторые практические рекомендации по управлению турбулентностью в струях. Установленная аналогия является убедительным аргументом в пользу предположения, что турбулентность в незамкнутых потоках является результатом шумоиндуциро-

ванного фазового перехода.

2. Возбуждение колебаний маятника за счет случайной вибрации оси подвеса можно рассматривать как шумоиндуцированный фазовый переход второго рода. При этом в качестве параметра порядка можно взять либо среднее значение мгновенной амплитуды колебаний, либо ее квадрат. Показано, что возбуждение шумоиндуцированных колебаний происходит через особого рода перемежаемость — типа “включено–выключено”.

3. Имеется возможность управления как амплитудой так и частотой шумоиндуцированных колебаний посредством дополнительного гармонического воздействия: при низкочастотном воздействии происходит интенсификация колебаний, при высокочастотном — подавление, а при резонансном — синхронизация в смысле захвата средней частоты.

4. Для различения шумоиндуцированных колебаний в рассматриваемых системах и хаотических колебаний динамического происхождения возможно применять критерий Рытова–Диментберга.

5. Замена в рассматриваемой эпидемиологической модели периодического изменения степени контакта с инфекцией на случайное практически не меняет характера колебаний переменных модели. Это говорит о том, что в этих колебаниях проявляются внутренние свойства системы.

Научная новизна результатов работы состоит в следующем.

Впервые детально исследовано возникновение шумоиндуцированных колебаний в маятнике со случайно колеблющейся осью подвеса. Показано, что возникновение таких колебаний может рассматриваться как неравновесный фазовый переход второго рода.

Показана возможность применения критерия Рытова–Диментберга для различения шумоиндуцированных колебаний и хаотических колебаний в динамических системах.

Впервые показана возможность управления шумоиндуцированными колебаниями дополнительным гармоническим воздействием и выявлены закономерности такого управления. В частности, показана возмож-

ность синхронизации шумоиндуцированных колебаний в смысле захвата средней частоты.

Впервые исследованы колебания в эпидемиологической модели со случайно изменяющейся степенью контакта с инфекцией.

Научно-практическое значение результатов работы состоит в том, что выявленная аналогия между турбулентными пульсациями в струе и шумоиндуцированными колебаниями маятника помогает понять природу турбулентности и дать рекомендации по более эффективному управлению турбулентностью.

## Глава 1. Турбулентность и когерентные структуры в дозвуковой затопленной струе

Струя жидкости (или газа), истекающая в неограниченное пространство, заполненное той же жидкостью (или тем же газом), называется *затопленной струей* [71]. Ниже мы будем рассматривать именно такие струи. Дозвуковая затопленная струя жидкости является интересным объектом с колебательной и волновой точки зрения.

Из-за неустойчивости Кельвина-Гельмгольца при достаточно больших числах Рейнольдса  $Re = U_0 D / \nu$ , где  $U_0$  - это скорость жидкости у сопла,  $D$  диаметр сопла,  $\nu$  кинематическая вязкость жидкости, в слое смешения жидкости возбуждаются и усиливаются так называемые гидродинамические волны. Амплитуда этих волн уменьшается экспоненциально вне слоя смешения. Гидродинамические волны могут распространяться только вниз по потоку со скоростью порядка скорости жидкости. Отличительной особенностью гидродинамических волн является их случайный характер. Тем не менее, несмотря на случайность процессов, в струе возникают сравнительно регулярные крупномасштабные образования, называемые *когерентными структурами*. Комбинация случайных мелкомасштабных флуктуаций и сравнительно регулярных крупномасштабных когерентных структур является отличительной особенностью турбулентности в струях жидкости.

Интересно, что взаимодействуя с каким-то препятствием или неоднородностью гидродинамические волны не отражаются, а индуцируют акустические волны, распространяющиеся вверх по потоку. Акустические волны, в свою очередь, встретив на своем пути препятствие или неоднородность, так же не просто отражаются, а индуцируют гидродинамические волны вниз по потоку, и так далее.

Возбуждение когерентных структур, как было замечено выше, является результатом неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, но в их образовании нелинейные эффекты играют доминирующую роль. Это связано с фактом, что из-за неоднородности, в струях жидкости существует нелинейная обратная связь через индуцированную акустическую вол-

ну.

На сегодня существует обширная литература, посвященная неустойчивости в слоях смешения струй и следов, приводящая к их турбулизации и образованию крупномасштабных когерентных структур (см., например [132, 133, 127]). Теория этих явлений основывается в основном на взглядах, полностью построенных на результатах прямых численных расчетов [134, 135] или расчетов методом *дискретных вихрей* [136, 131, 137, 138, 139]. В последнем случае предполагается, что вихри уже образовались и рассматривается только их взаимодействие. Непосредственно проблема возникновения вихрей изучалась в очень малом количестве работ. Среди них нужно упомянуть работу Рэля [140].

За последние тридцать лет эти проблемы изучались в основном в работах [141, 133, 142, 143]. В этих работах при данном профиле средней скорости потока приближенно решались линеаризованные уравнения Эйлера для отклонений от средних значений. Поскольку коэффициенты этих уравнений зависят от координат, точное аналитическое решение не может быть получено. Численные расчеты, выполненные этими авторами, находятся в достаточно хорошем согласии с экспериментальными данными. Некоторые нелинейные проблемы неустойчивости в слое смешения струй и следов рассматривались Герценштейном и Сухоруковым [144].

Для проведения аналогии между турбулентностью и шумоиндуцированными колебаниями были проанализированы экспериментальные данные, полученные сотрудниками Государственного научно-исследовательского центра ЦАГИ, по измерению пульсаций скорости в дозвуковой затопленной струе термоанемометрическим методом. Измерения были выполнены для чисел Рейнольдса, равным  $Re = 10^4 - 10^5$ . Струя истекала из сопла диаметром 2.5 см. Результаты измерений и их анализ приведены ниже.

## 1.1 Струя как усилитель гидродинамических и акустических возмущений. Переход к турбулентности в струе.

Вытекающая из сопла струя всегда будет заметно уширяться. Это связано с фактом, что из-за вязкости все большее число слоев жидкости будет вовлекаться в движение. Профиль средней скорости будет существенно изменяться в ходе этого процесса. Вблизи сопла профиль имеет приближенно прямоугольную форму, тогда как при удалении от сопла, он будет принимать колоколообразную форму, см. рис. 1. В струе, согласно нашему рассмотрению, можно выделить три основные части: *начальный участок* (I), *переходной участок* (II) и *основной участок* (III), каждый из которых характеризуется своим собственным законом изменения средней скорости вдоль оси струи (рис. 2). Слой жидкости, в котором происходит значительное изменение средней скорости, называется *слоем смешения*. Из рисунка 1 видно, что внутри начального участка струи ( $x \leq x_{in}$ ) толщина слоя смешения возрастает приблизительно по линейному закону с увеличением расстояния до сопла. При  $x = x_{in}$  толщина внутренней части слоя смешения  $\delta_1$  становится равной половине ширины сечения сопла для плоской струи или половине радиуса сопла для круглой струи, после чего формируется сплошной граничный слой. Интересно заметить, что когерентные структуры формируются только в слое смешения. Когерентные структуры представляют собой образования вихрей. Они имеют размер порядка поперечного сечения слоя смешения и достаточно долго живут. Присутствие когерентных структур является причиной перемежаемости в струе, особенно вблизи ее внешней границы, где перемежаются турбулентные и ламинарные фазы, (см. рис. 3 *a* взятый из книги [145] и *b* где изображена теневая картинка струи. В литературе, посвященной турбулентности, относительная длительность турбулентной фазы называется *фактором перемежаемости*. Профиль фактора перемежаемости  $\gamma$  показан на рисунке 3 *a* справа. Пример пульсаций скорости в сечении круглой струи, отстоящем от сопла на  $x/D = 0.5$  и при расстоянии от оси струи равном  $R$ , показан на рисунке 3 *с*.

Основные результаты в изучении когерентных структур были получены для слоя смещения внутри начального участка плоской или круглой струи. В этом слое, в дополнение к поперечным вихревым структурам образуются поперечные вихревые структуры. Взаимодействие между продольными и поперечными вихрями вызывает не только образование более крупномасштабных вихревых структур, но и возникновение мелкомасштабной турбулентности.

Эти факты были подчеркнуты в изучении развития крупномасштабных вихрей в начальном участке круглой струи [146]. Таким образом, вблизи сопла образуются тонкие кольцеобразные вихри. Их спаривание приводит к образованию более крупных кольцеобразных вихрей, которые затем теряют азимутальную однородность, преобретают форму звезды и становятся трех-размерными. Дальнейшее развитие этих трех-размерных структур вызывает их полное или частичное спаривание с последующим разрушением этих структур в нерегулярные образования.

Неустойчивость Кельвина-Гельмольца на границе струи является причиной усиления возмущений в струе.

Таким образом, струя является усилителем возмущений и усилителем со значительным коэффициентом усиления. Это является причиной того, что ролью флуктуаций, технических и шумовых, нельзя пренебречь при рассмотрении струи. Поэтому естественно предположить, что именно эти усиленные флуктуации вызывают переход в струе, переход, связанный с турбулизацией струи и появлением качественно нового состояния - крупномасштабных когерентных структур. При рассмотрении появления турбулентности в струе как результата фазового перехода интенсивность этих флуктуаций может служить аналогом температуры в термодинамической системе. В качестве параметра порядка системы может быть выбрано отклонение средней скорости потока от ее начального значения. Это может быть проиллюстрировано рис. 4, где показана зависимость продольной составляющей средней скорости потока от расстояния. При увеличении расстояния от сопла, средняя скорость потока сначала не изменяется, а потом резко

начинает уменьшаться, так как энергия потока переходит в энергию турбулентного движения струи. Зависимость средней скорости от расстояния в эксперименте является гладкой из-за влияния аддитивного шума, однако она достаточно хорошо аппроксимируется ломаной линией. При такой аппроксимации точка, в которой происходит излом, может рассматриваться как начало фазового перехода второго рода, так как первая производная зависимости параметра порядка системы терпит разрыв. Из рисунка видно, что при низкочастотном акустическом воздействии на струю переход происходит раньше, а для высокочастотного позже.

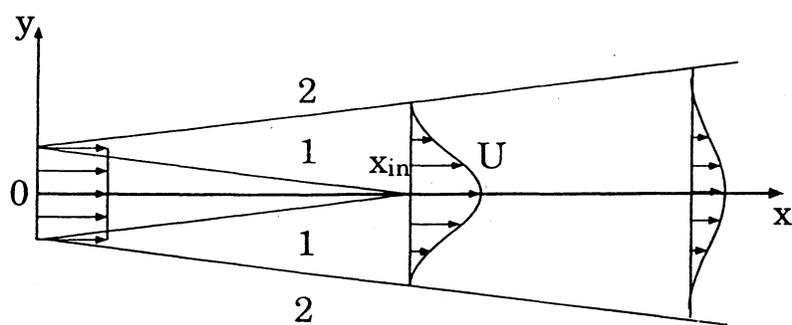


Рис. 1: Схематическое изображение расходящейся свободной струи, иллюстрирующее изменение профиля средней скорости и уширение слоя смешения. Кривые 1 и 2 соответствуют внутренней и внешней границам слоя смешения соответственно.

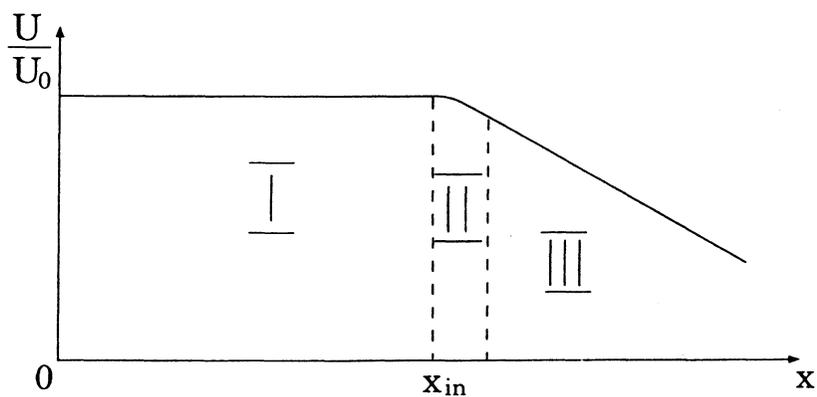


Рис. 2: Схематическая зависимость относительной средней скорости  $U/U_0$  на оси струи от расстояния до края сопла  $x$ .

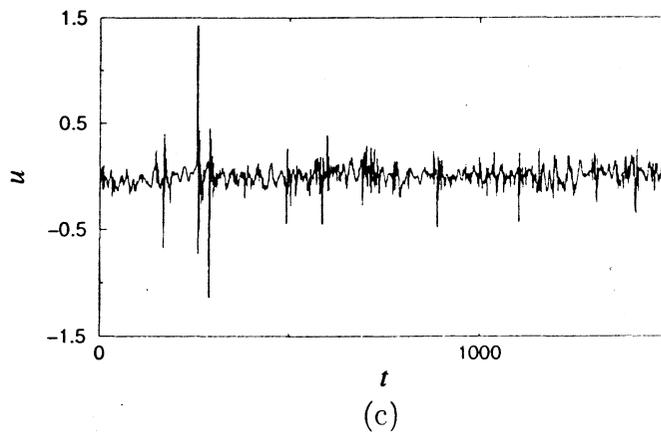
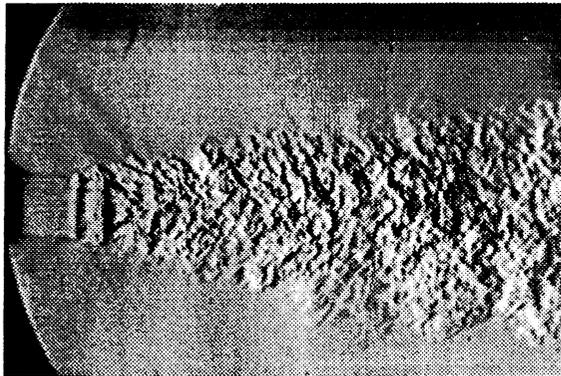
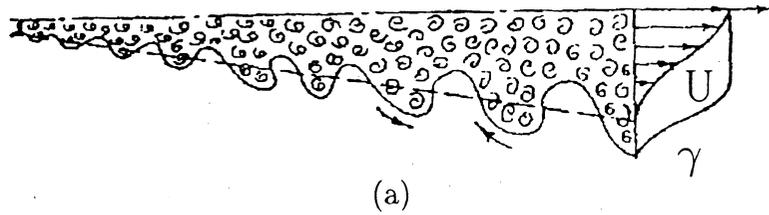


Рис. 3: (a) Схематическое изображение перемежаемости турбулентного потока в основной части круглой струи, профиля средней скорости  $U$  и  $\gamma$ ; (b) теневое изображение струи; (c) временная зависимость пульсаций скорости на краю круглой струи для расстояния от края сопла  $x/D = 0.25$ .

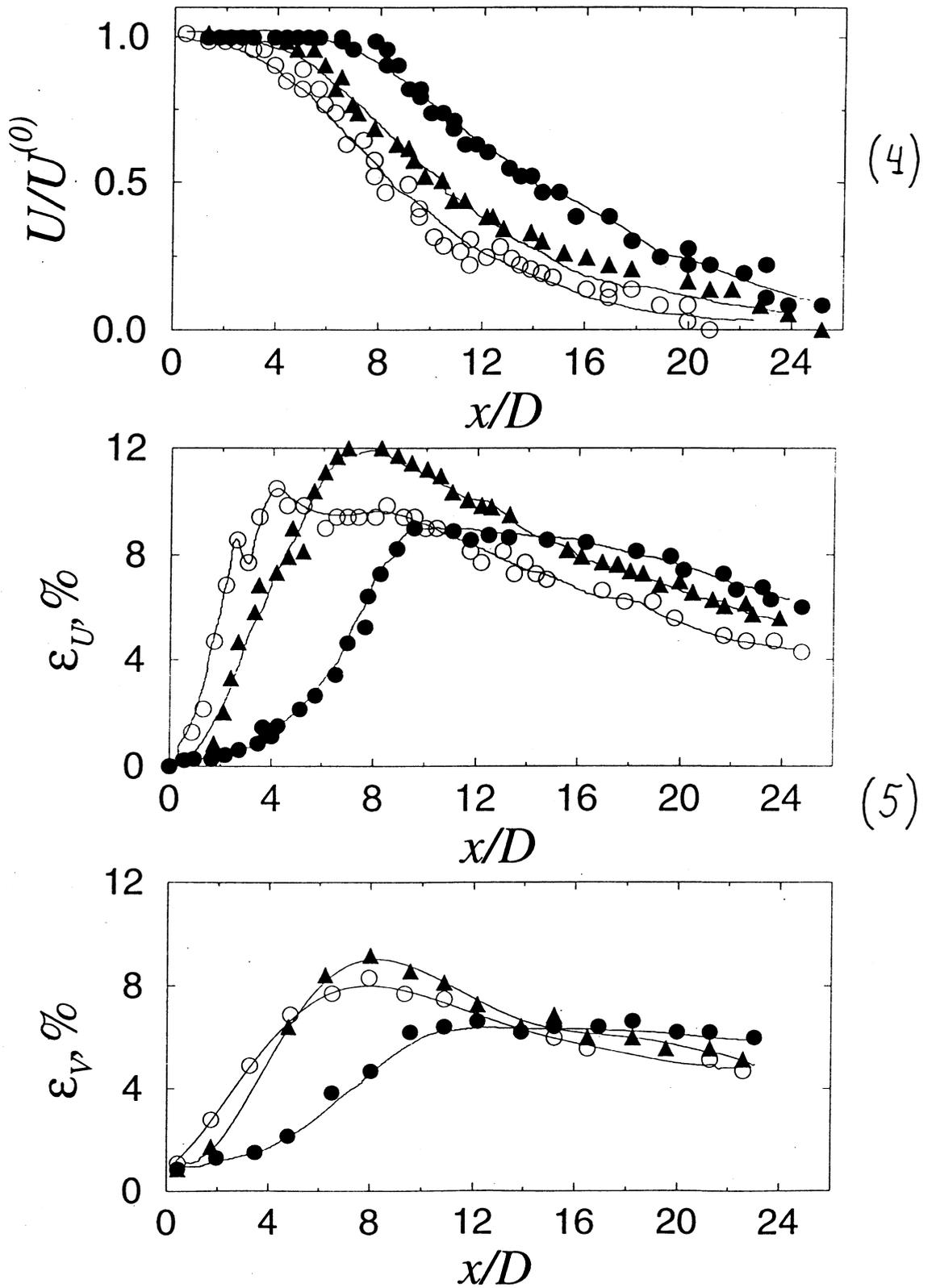


Рис. 4: 5. Экспериментальная зависимости (4) относительной средней скорости потока  $U/U^{(0)}$  и (5) относительной среднеквадратичной величины пульсаций продольной ( $\varepsilon_u$ ) и радиальной  $\varepsilon_v$ , составляющих гидродинамической скорости от  $x/D$  вдоль оси струи в случае продольного акустического воздействия с  $St_a = 0.25$  (прозрачные кружки),  $St_a = 2.75$  (непрозрачные кружки). Соответствующие зависимости в отсутствие акустического воздействия показаны треугольниками. Амплитуда колебательной скорости в акустической волне на оси струи вблизи сопла составляет 0.07% от  $U_0$ .

## 1.2 Взаимодействие гидродинамических и акустических волн в струе. Управление турбулентностью в струях акустическим воздействием

Из-за сильной неустойчивости струя жидкости представляет собой усилитель возмущений с частотами, находящимся в определенном интервале. Этот усилитель имеет достаточно высокий пространственный коэффициент усиления. Маленькое акустическое возмущение на некоторой частоте  $f_a$  из этого интервала, данное возле сопла, превращается в усиливающуюся гидродинамическую волну. Это доказывается экспериментальными результатами, полученными Crow, Champagne [150] и Chan [151]. Из работ [150] следует, что выше некоторого значения амплитуды акустической волны, зависимость относительного среднеквадратичного значения пульсаций продольной составляющей гидродинамической скорости  $\varepsilon_u = \sqrt{u^2}/U_0$ , где  $u$  это отклонение продольной составляющей гидродинамической скорости от ее среднего значения, от частоты акустической волны  $f_a$ , измеренной в числах Струхала, имеет резонансный характер. Этот резонанс вызван комбинацией линейного усиления, которое тем больше, чем больше частота возмущения, и нелинейного насыщения, которое увеличивается при увеличении частоты возмущения. Для  $\varepsilon_{ua} = \sqrt{u_a^2}/U_0 = 0.02$ , где  $u_a$  это колебательная скорость акустической волны, зависимость  $\varepsilon_u$  от  $St_a = f_a D/U_0$  показана на рис. 6 а. Видно, что  $\varepsilon_u$  максимально для  $St_a \approx 0.3$ .

Рисунок 6 б, взятый из [151] показывает, что коэффициент усиления зависит немонотонно от расстояния до сопла: зависимость имеет пик при  $x/D = (0.75 \div 1.25)/St_a$ . Теоретическая зависимость, подобная показанной на рис. 6 б была получена Плашко [143] приближенным решением линеаризованных уравнений Эйлера для слаборасходящейся струи. Эта зависимость показана на рисунке 6 с. Применяя этот метод, Плашко показал, что уменьшение коэффициента усиления при удалении от сопла вызван расходимостью струи, а не нелинейными эффектами, как утверждалось некоторыми исследователями.

Одним из интересных проявлений нелинейных эффектов в струе

является возможность заметного подавления или усиления гидродинамических пульсаций в струе слабым периодическим воздействием на одной или другой частоте. Подавление гидродинамических пульсаций имеет место, если частота периодического воздействия достаточно высока, тогда как усиление происходит при сравнительно низкой частоте периодического воздействия.

Экспериментальные исследования показали, что существенное усиление или подавление когерентных структур внутри начальной части струи благодаря периодическому воздействию, сопровождается изменением аэродинамических, тепловых, диффузионных и акустических свойств струи. Такие явления наблюдались экспериментально множеством исследователей. Нужно заметить, что влияние акустического воздействия было впервые исследовано Гиневским и Власовым [154, 120]. Рассмотрим основные результаты этих работ. В случае низкочастотного гармонического акустического воздействия на частоте  $f$ , которая соответствует числам Струхала в интервале от 0.2 до 0.6, внутри начального участка вихри в слое смещения струи увеличиваются, приводя к интенсификации турбулентного перемешивания, утолщению слоя смещения, укорачиванию начального участка и усилению захвата; продольная и поперечная составляющие скорости пульсаций на оси струи постепенно возрастают при этом процессе. Эти эффекты наблюдаются независимо от направления струи если амплитуды продольной и поперечной составляющей колебательной скорости в звуковой волне в струе возле сопла составляет от 0.05 до 2 % от  $U_0$ . Для возникновения этих эффектов амплитуда акустической волны должна превышать определенное пороговое значение. При увеличении амплитуды акустической волны от ее порогового значения сначала имеет место усиление турбулентного перемешивания, а затем наступает насыщение. Дальнейшее увеличение амплитуды акустической волны не имеет никакого эффекта или эффект очень мал.

В случае высокочастотного акустического воздействия на струю с частотами соответствующими числам Струхала от 1.5 до 5 вихри в слое смещения струи становятся меньше, что приводит к ослаблению

турбулентного перемешивания, уменьшению толщины слоя смешения, и удлинению начального участка. Продольная и поперечная составляющие скорости пульсаций на оси струю заметно уменьшаются в ходе этого процесса. В противоположность случаю низкочастотного воздействия на струю, высокочастотное воздействие не приводит к насыщению при увеличении амплитуды воздействия, более того увеличение амплитуды воздействия выше определенного значения приводит не к подавлению турбулентности, а к ее усилению. Последнее подтверждается экспериментальными результатами, представленными на рис. 7 а [127]. Упомянутые эффекты наблюдались в струях для широкого интервала чисел Рейнольдса ( $Re = 10^2 \div 10^6$ ) для начального ламинарного и для турбулентного граничного слоя с уровнем начальной турбулентности меньше чем 10%.

Это также может быть проиллюстрировано экспериментальными зависимостями относительной средней скорости потока и относительным среднеквадратичным значением пульсаций продольной ( $\varepsilon_u$ ) и радиальной ( $\varepsilon_v$ ) составляющих гидродинамической скорости от расстояния до сопла вдоль оси (рис. 4,5). Все эти зависимости соответствуют фиксированному значению интенсивности акустической волны. Видно, что средняя скорость существенно уменьшается в случае низкочастотного воздействия ( $0.2 < St_a < 1.5$ ) и увеличивается в случае высокочастотного воздействия ( $St_a > 1.5$ ). Уменьшение средней скорости показывает, что турбулентность возрастает, в то время как ее увеличение свидетельствует об уменьшении турбулентности.

Нужно заметить, что по мере увеличения низкочастотного акустического воздействия на струю, длина начального участка струи уменьшается до полного его исчезновения [155].

Эффекты, подобные описанным выше, наблюдались так же при других случаях периодического воздействия на струю: продольной или поперечной вибрации сопла, пульсирующему потоку жидкости из сопла, и.т.п. [127].

Подробное экспериментальное и численное изучение подавления турбулентности в струях было проведено так же Хуссейном и соавто-

рами [121, 156, 157, 122]. Обратим внимание только на один результат их работы, который заключается в том, что подавление турбулентности акустическим воздействием с фиксированной амплитудой зависит от частоты воздействия немонотонно: оно максимально при определенной частоте воздействия, зависящей от амплитуды воздействия (см. рис.7 *b*, взятый из [122]).

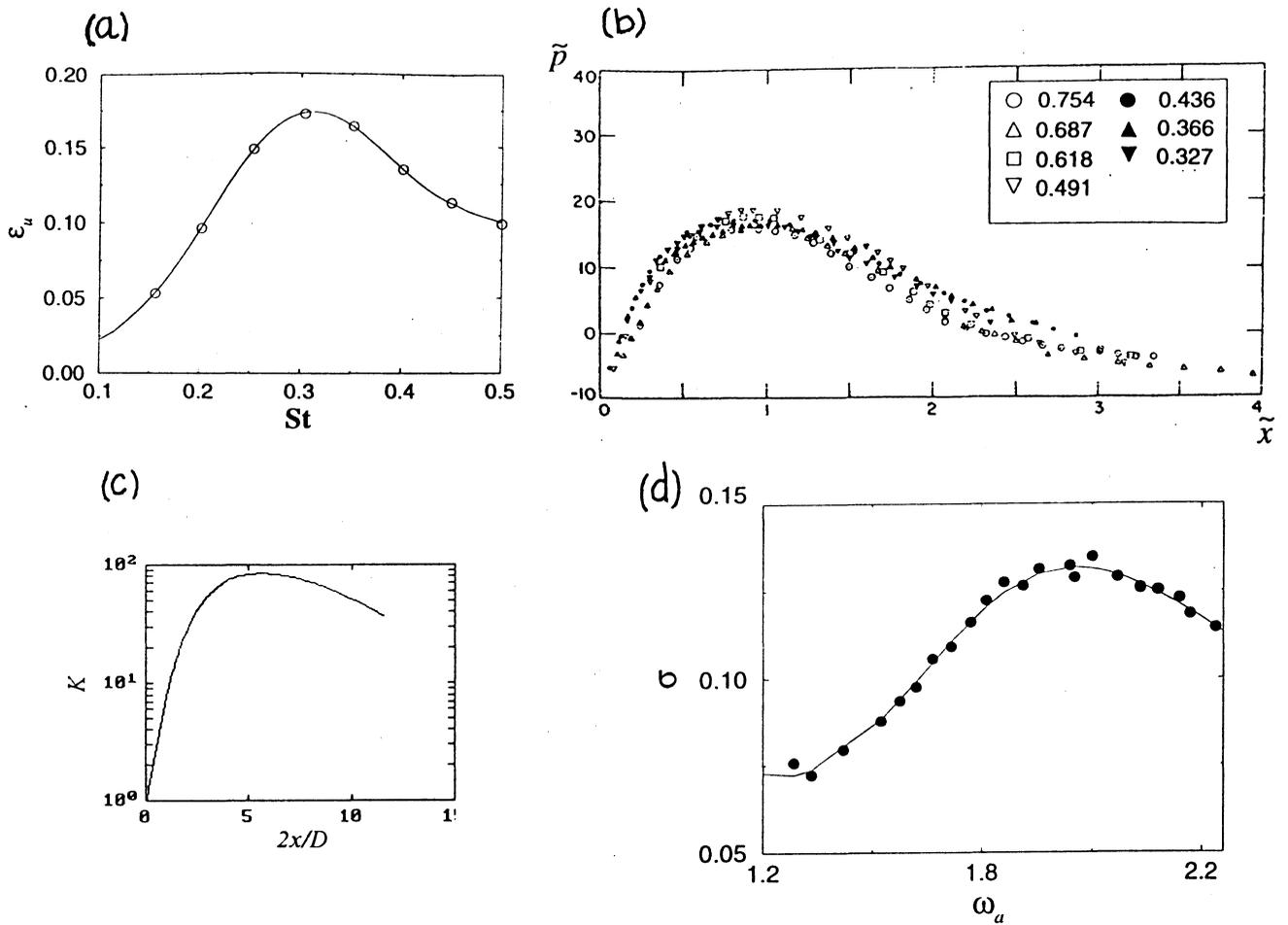


Рис. 6: (a) Зависимость  $\varepsilon_u$  от  $St$  для  $\varepsilon_{ua} = 0.02$ ,  $x/D = 4$ . В отсутствие дополнительных возмущений  $\varepsilon_u \approx 0.04$ . (b) Экспериментальная зависимость среднеквадратичных пульсаций гидродинамического давления  $\tilde{p} = \langle p^2 \rangle^{1/2}$  (в децибелах) в середине слоя смешения от  $\tilde{x} = (x/D)St_a$  для различных значений амплитуды акустических возмущений и для различных значений числа Струхала; (c) теоретическая зависимость фактора усиления  $K$  для аксиально симметричных гидродинамического давления в круглой струе от относительного расстояния до края сопла  $x/R$ , для  $r/R = 1.05$ ,  $St_a = 0.5$ ; и для сравнения (с зависимостью  $\sigma = \overline{\varphi^2}^{1/2}$  для колебаний маятника от  $\omega_a$  для  $\omega_0 = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = 100$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr} = 1.01$ ,  $a = 0.5$ ).

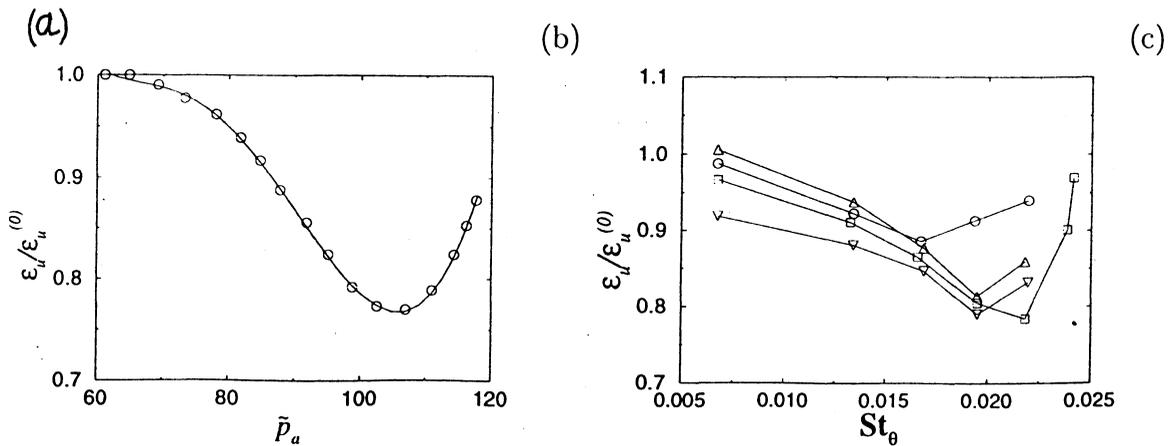


Рис. 7: Подавление турбулентности в струе акустическим воздействием. Экспериментальная зависимость фактора подавления  $\varepsilon_u/\varepsilon_u^{(0)}$ , где  $\varepsilon_u^{(0)}$  это относительная интенсивность продольных пульсаций скорости в отсутствие акустического воздействия, (a) от относительной амплитуды акустического давления  $\tilde{p}_a$ , измеряемого в децибелах, для  $St_a = 2.35$ ,  $x/D = 8$ ; (b) от числа Струхала  $St_\theta = St, \theta/D$ , где  $\theta$  толщина слоя смешения, для  $x/\theta = 200$  (показаны зависимости для четырех значений амплитуды колебательной скорости акустической волны: 0.5 (кружки), 2.5 (треугольники вверх), 3.5 (треугольники вниз) and 4.5 (квадратики), в процентах от  $U_0$ ).

### 1.3 Эволюция спектров пульсаций скорости в струе

Случайный характер гидродинамических волн в струе проявляет себя в частности в непрерывности спектров мощности пульсаций скорости и давления. Внутри начальной части струи эти спектры имеют резонансный характер. Эксперименты показывают, что частота  $f_m$  соответствующая пику в спектре мощности убывает с увеличением расстояния до сопла.

К примеру, в случае круглой струи, возле сопла, когда  $x/D < 1$ , число Струхалия  $St_m = f_m D / U_0$  в слое смешения струи варьируется от 1 до 4 – 5, тогда как в конце начального участка струи  $St_m = 0.3 – 0.5$  [147]. Таким образом, к концу начального участка струи величина  $St_m$  уменьшается на фактор лежащий в интервале от 8 до 16. Внутри основного участка струи спектры мощности монотонно убывают с частотой. Примеры эволюции спектров мощности и временных зависимостей скорости пульсаций с расстоянием от сопла на оси струи и вдоль линии, отстоящей от оси на  $R$ , показаны на рис.8.

Нужно заметить, что частота  $f_m$  представляет собой не ступенчатую, а гладкую функцию расстояния от сопла (см. рис.9, на котором показана экспериментальная зависимость числа Струхалия  $St_m$  от относительного расстояния до сопла  $x/D$  ).

Из-за пространственной неоднородности внутри слоя смешения в каждом поперечном сечении струи индуцируются акустические волны, распространяющиеся вверх по потоку. Присутствие этих волн косвенно подтверждается экспериментальными данными, полученными Лауфером [149]. Соответственно этим данным высокочастотные пульсации скорости жидкости внутри слоя смешения возле края сопла модулируются низкочастотными пульсациями с частотами, соответствующими числам Струхалия  $St = 0.3–0.5$ . Этот факт так же может быть проиллюстрирован спектральной плотностью пульсаций скорости на линии, отстоящей на  $R$  от оси струи, для  $x/D = 0.5$  (рис. 10). Видно, что спектр имеет пики на основной частоте, связанной с числом Струхалия  $St = 3.2$  и двух боковых частотах, соответствующим  $St_1 = 2.7$

и  $St_2 = 3.7$ . Таким образом частота модуляции соответствует числу Струхаля, равном 0.5.

Индукцированные акустические волны приводят к нелинейной обратной связи. Благодаря этой обратной связи каждое поперечное сечение струи может быть рассмотрено как осциллятор с собственной частотой, зависящей от расстояния между этим сечением и соплом.

Очевидно, что наиболее интенсивные пульсации в поперечном сечении с координатой  $x$  должны происходить на частоте  $f_m$ , связанной с  $x$  условием резонанса:

$$\frac{x f_m}{U_v} + \frac{x f_m}{a} = N,$$

где  $U_v$  — это скорость движения вихрей (вихревого движения) (Из визуальных наблюдений и измерения пространственно-временных корреляций следует, что  $U_v \approx 0.5-0.7U_0$ ),  $a$  — скорость звука, и  $N$  целое число. Отсюда следует, что  $St_m = x^{-1}$  для  $U_v/U_0 = 0.5$ ,  $N = 2$ . Это точно соответствует зависимости, экспериментально полученной Петерсеном (рис. 9 а). Однако, наши эксперименты показали, что такая зависимость имеет место только для линии внутри слоя смешения, тогда как на оси струи внутри начального участка число Струхаля  $St_m$  уменьшается заметно медленней, а именно,  $St_m \sim x^{-1/3}$  (см., 9 б). Поскольку на оси струи отсутствует нелинейная обратная связь, указанное уменьшение  $St_m$  по-видимому связано с увеличением интенсивности пульсаций скорости (см. ниже). С увеличением расстояния от сопла величина спектральной плотности при  $St = St_m$  возрастает монотонно. Это проиллюстрировано рисунком 9 с.

В случае низкочастотного периодического воздействия на струю спектральные плотности пульсаций скорости возле сопла содержат дискретные компоненты на частоте воздействия и ее высших гармоник. Пример таких спектров приведен на рис. 11 а. В случае высокочастотного периодического воздействия (см. рис. 11 б) спектральные плотности пульсаций скорости внутри слоя смешения в непосредственной близости от сопла так же содержат дискретные компоненты на частоте воздействия и ее высших гармоник. Вдали от сопла вторая субгармо-

ника появляется в спектре. Далее, интенсивность этой субгармоники возрастает тогда как интенсивности основных гармоник уменьшается. С дальнейшим увеличением расстояния от сопла спектр становится практически монотонно убывающим.

Зависимость числа Струхаля, соответствующему спектральной линии с наибольшей интенсивностью от расстояния до сопла в присутствии высокочастотного акустического воздействия с числом Струхаля, равным 3.54, было получено Кибенсом [158], см. рис.12. Видно, что эта зависимость имеет ступенчатый характер с различимыми гистерезисами.

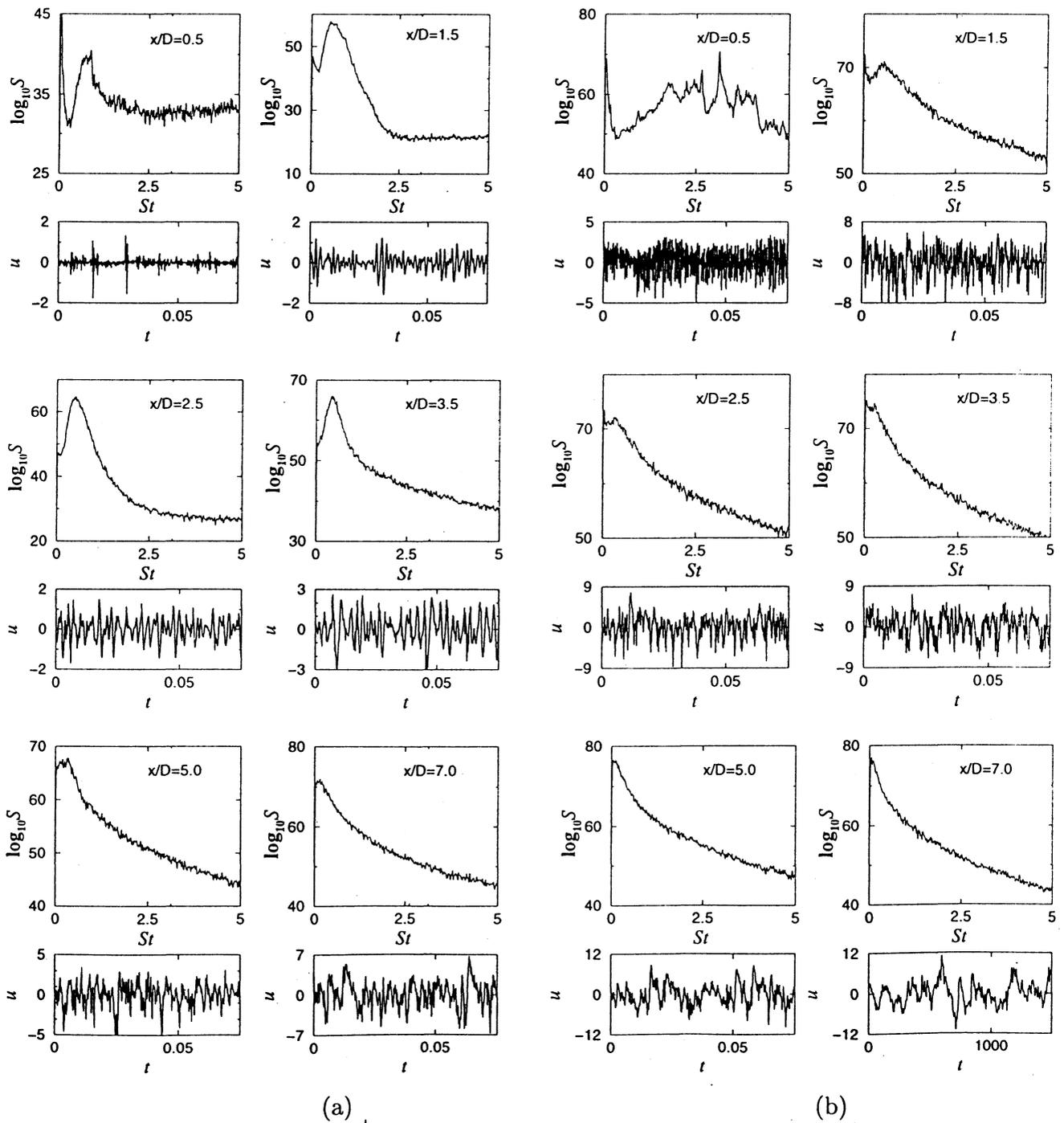
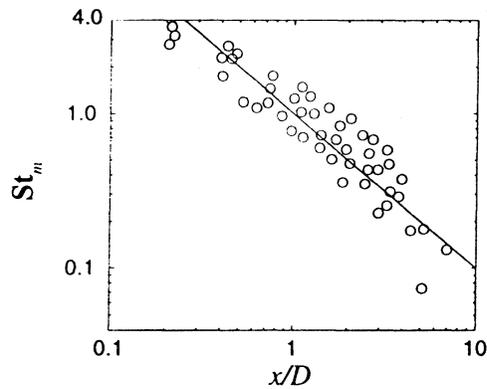
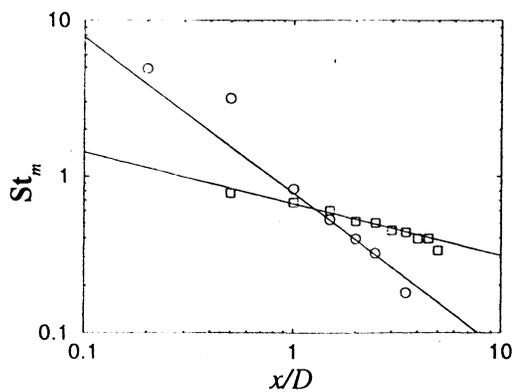


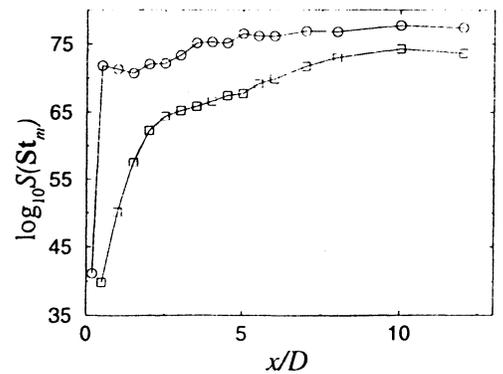
Рис. 8: Примеры эволюции спектральной плотности  $S$  и временных зависимостей пульсаций скорости  $u$  при изменении расстояния до края сопла (a) вдоль оси струи и (b) вдоль края струи



(a)



(b)



(c)

Рис. 9: Зависимость числа Струхаля  $St_m$  от относительного расстояния до края сопла  $x/D$ ; (a) данные Петерсена [155], (b) наши данные. Зависимости от расстояния для оси струи и для линии отстоящей от оси на  $R$  показаны квадратами и кружками соответственно. Сплошной линией показаны зависимости  $St_m = 0.67x^{-1/3}$  и  $St_m = 0.78x^{-1}$ . (c) Зависимости  $S(St_m)$  от  $x/D$  вдоль оси струи (квадратики) и вдоль линии, отстоящей от оси на  $R$  (кружки).

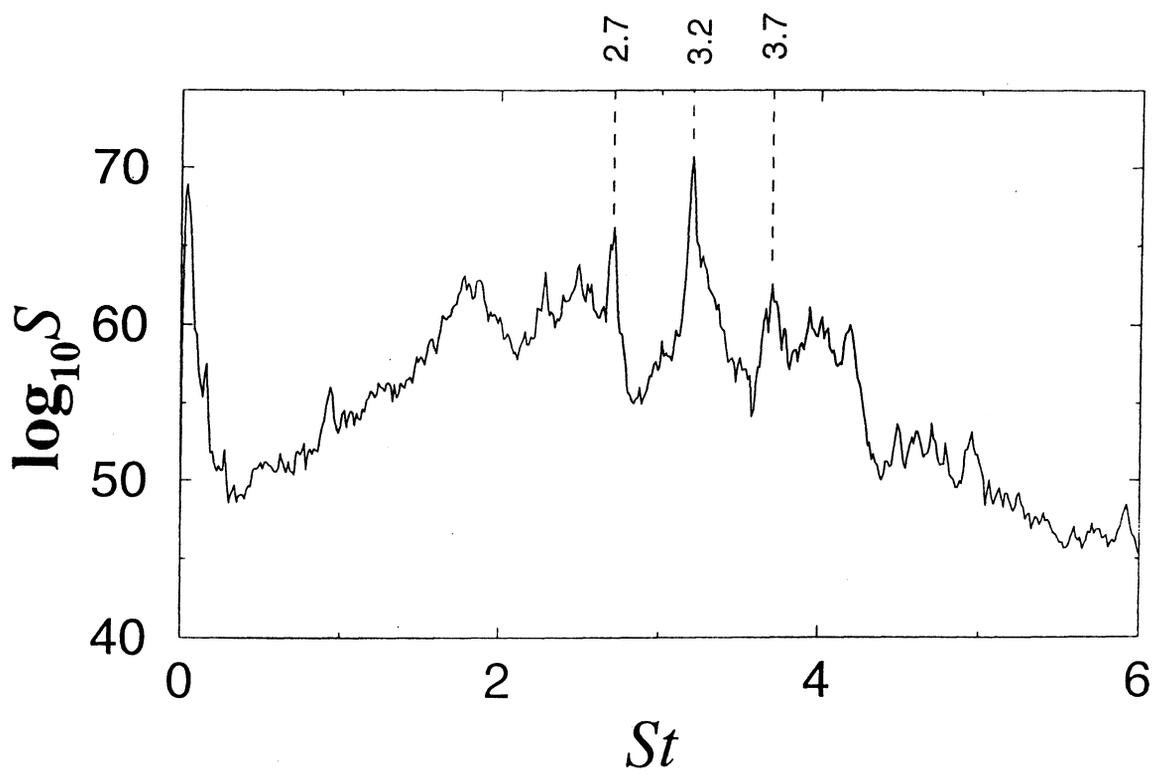


Рис. 10: Спектральная плотность пульсаций скорости для  $y/R = 1$  и  $x/D = 0.5$ .

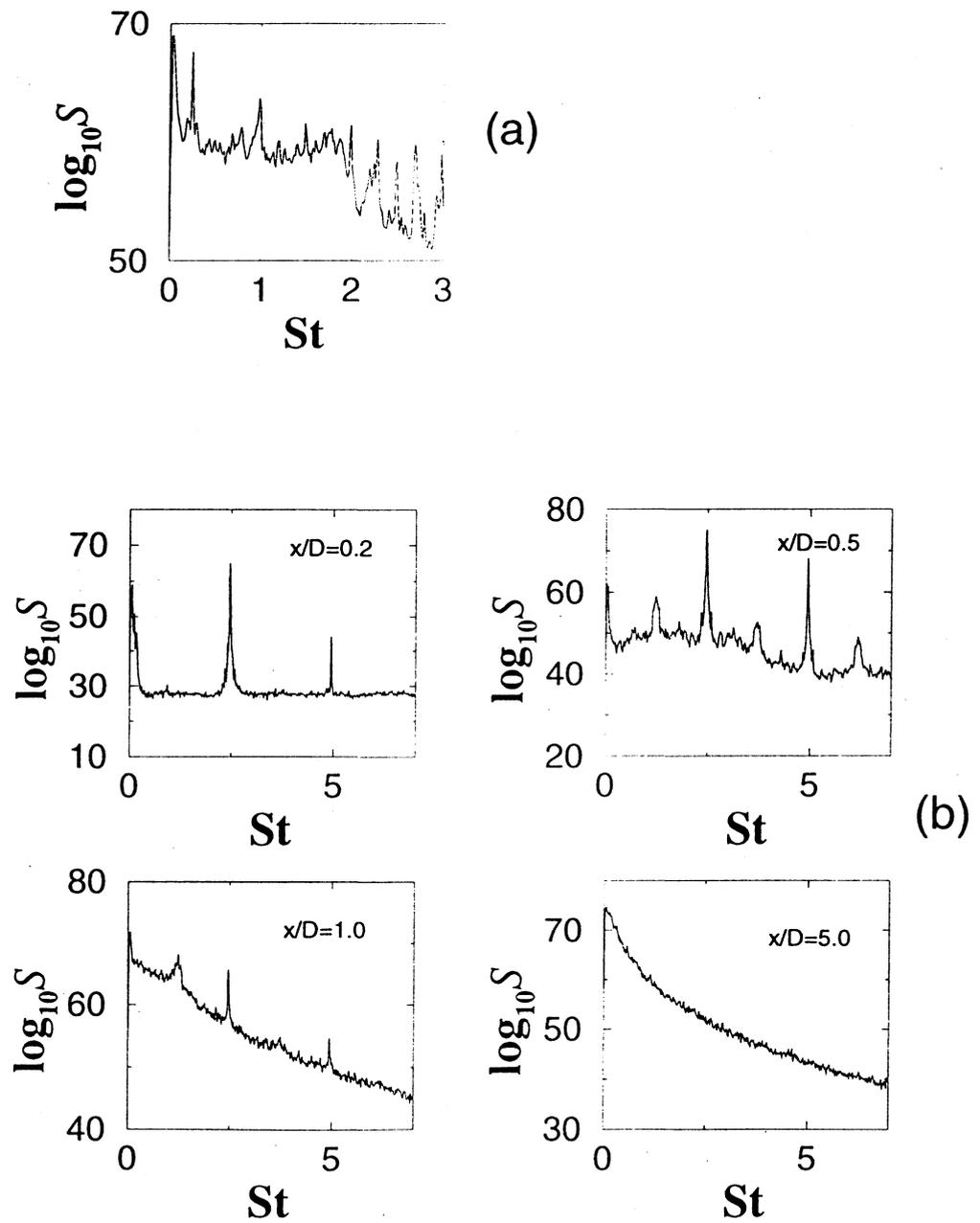


Рис. 11: Спектральные плотности пульсаций скорости при акустическом воздействии на круглую струю в случаях (a) низкочастотного воздействия ( $St_a = 0.25, x/D = 0.5$ ) и (b) высокочастотного воздействия ( $St_a = 2.5$ ) для различных величин  $x/D$ .

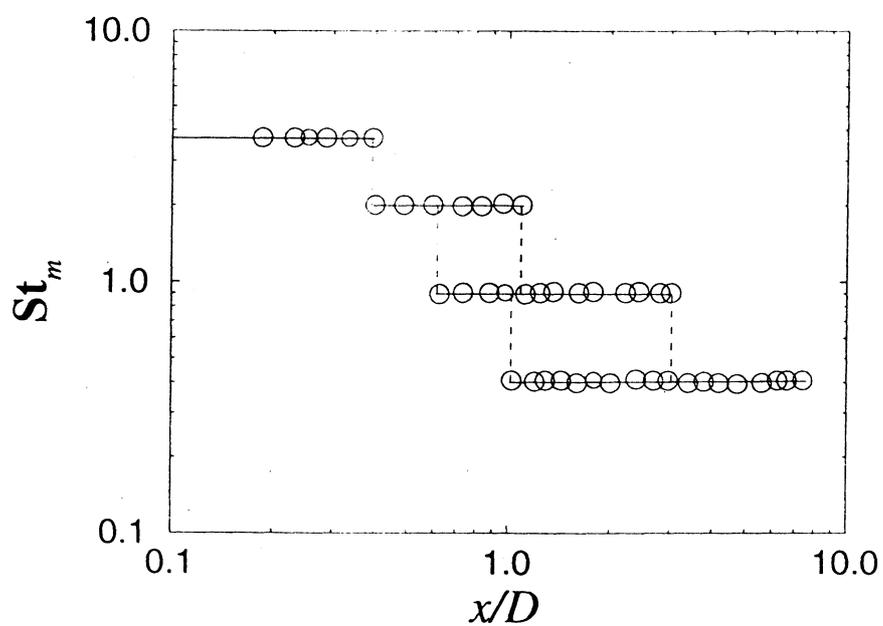


Рис. 12: Зависимость величины числа Струхалия, соответствующего спектральной линии с наибольшей интенсивностью, от расстояния до сопла в присутствии высокочастотного воздействия с числом Струхалия, равным 3.54.

## Глава 2. Шумоиндуцированные колебания в маятнике со случайно колеблющейся осью подвеса

Как уже было указано, шумоиндуцированные фазовые переходы, подобные рассмотренным в настоящей работе, теоретически рассматривались Ван-ден-Броком с соавторами [85, 117] для систем, описываемых конечно-разностными моделями дифференциальных уравнений в частных производных определенного вида. В статье [86] авторы численно обнаружили индуцированные шумом двумерные структуры, которые можно рассматривать как своеобразную турбулентность.

Переходы, о которых здесь будет говориться, принципиально отличаются от рассматриваемых другими авторами (см., например, [1, 23]), которые под этим термином понимают появление за счет мультипликативного шума дополнительных максимумов в распределении вероятностей, главным образом в системах, обладающих свойством мультистабильности. Этот факт отмечен также в работах [85, 117]. Заметим, что термин "Неравновесный шумоиндуцированный фазовый переход" используется здесь в том же смысле, как и в книге [51]. Хакен отметил аналогию между фазовыми переходами в системах, близких к термодинамическому равновесию и переходами типа беспорядок-порядок в неравновесных системах. В этом же смысле этот термин был использован в книге [88].

Весьма интересно, что рассматриваемые шумоиндуцированные фазовые переходы возможны в простейших системах, например в физическом маятнике со случайно колеблющейся осью подвеса. Исследование именно таких простых систем удобно потому, что, с одной стороны, удастся провести приближенное аналитическое рассмотрение, а с другой стороны, маятник представляет собой вполне реальный физический объект, что в принципе дает возможность проведения эксперимента.

## 2.1 Теоретическое рассмотрение колебаний маятника, вызванных случайными колебаниями оси подвеса

Возможность возбуждения колебаний осциллятора при параметрическом случайном воздействии была впервые показана аналитически Стратоновичем и Романовским [96, 97]. Затем такая же задача решалась Диментбергом [98]. Чтобы получить ограничение амплитуды возбуждаемых колебаний авторы этих работ принимали во внимание нелинейное трение. На самом деле, учет нелинейного трения, как будет показано ниже, не обязателен, поскольку ограничение амплитуды может происходить за счет нелинейности возвращающей силы. Однако, такой учет является удобным, так как позволяет исключить случайные проворачивания маятника на угол кратный  $2\pi$ . Эти проворачивания затрудняют анализ полученных результатов.

Уравнение движения маятника со случайно колеблющейся осью подвеса при учете нелинейного трения может быть записано в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{H}{J} (1 + \alpha\dot{\varphi}^2) \dot{\varphi} + \frac{mbg}{J} (1 + \xi(t)) \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – угловое отклонение маятника относительно положения равновесия,  $J$  и  $m$  – момент инерции и масса маятника,  $b$  – расстояние от центра масс до оси подвеса,  $H\dot{\varphi}$  – момент сил трения в линейном приближении,  $\alpha$  – коэффициент нелинейного трения,  $\xi(t)$  – ускорение оси подвеса, представляющее собой сравнительно широкополосный случайный процесс с отличной от нуля спектральной плотностью на частоте  $2\omega_0$ . Будем считать, что интенсивность колебаний оси подвеса сравнительно невелика, так что колебания маятника можно считать настолько малыми, чтобы  $\sin \varphi$  можно было представить в виде

$$\sin \varphi \approx (1 - \gamma\varphi^2) \varphi, \quad (2)$$

где  $\gamma = 1/6$ .

Приближенное аналитическое решение интересующей нас задачи может быть получено, если предположить, что  $\beta/\omega_0 \sim \epsilon$ ,  $\gamma\varphi^2 \sim \epsilon$ ,  $\xi(t) \sim \sqrt{\epsilon}$ , где  $\epsilon$  – некоторый малый параметр, который в окончатель-

ных выражениях следует положить равным единице. При этом уравнение (1) с учетом (2) удобно переписать в следующем виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \epsilon (-2\beta (1 + \alpha \dot{\varphi}^2) \dot{\varphi} + \omega_0^2 \gamma \varphi^3) - \sqrt{\epsilon} \xi(t) (1 - \epsilon \gamma \varphi^2) \varphi. \quad (3)$$

Уравнение (3) будем решать методом Крылова–Боголюбова с точностью до второго приближения по малому параметру  $\epsilon$ . Для этого положим  $\varphi = A \cos \psi + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$ , где  $\psi = \omega_0 t + \phi$ ,

$$\dot{A} = \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots, \quad (4)$$

$$\dot{\phi} = \epsilon F_1 + \epsilon^2 F_2 + \dots,$$

$u_1, u_2, \dots, f_1, f_2, \dots, F_1, F_2, \dots$ , – неизвестные функции. Используя процедуру метода Крылова–Боголюбова для стохастических уравнений (см. [97, 70]), легко найти выражения для неизвестных функций  $f_1, f_2$  и  $F_1$  (функция  $F_2$  дает лишь малые добавки к функции  $F_1$  и поэтому не представляет интереса). Оставляя в функции  $f_2$  только нелинейный член и подставляя найденные выражения в уравнения (4), получаем

$$\dot{A} = \left( -\beta \left( 1 + \frac{3}{4} (\alpha \omega_0^2 + \gamma) A^2 \right) + \frac{\omega_0}{2} \overline{\xi \sin 2\psi} \right) A, \quad (5)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{3}{8} \omega_0 \gamma A^2 + \omega_0 \overline{\xi \cos^2 \psi}, \quad (6)$$

где черта над некоторым выражением означает операцию его усреднения по времени. Как показано в [97], в уравнении (5)

$$\overline{\xi \sin 2\psi} = \langle \overline{\xi \sin 2\psi} \rangle + \zeta_1(t), \quad (7)$$

где угловые скобки означают усреднение по статистическому ансамблю,  $\zeta_1(t)$  – случайный процесс, который можно считать белым шумом с нулевым средним значением и интенсивностью  $K_1$ , равной

$$K_1 = \frac{1}{2} \kappa(2\omega_0). \quad (8)$$

В выражении (8)

$$\kappa(2\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle \cos 2\omega_0\tau d\tau$$

– спектральная плотность процесса  $\xi(t)$  на частоте  $2\omega_0$ . Величина  $\overline{\langle \xi \sin 2\psi \rangle}$  в формуле (7) вследствие наличия корреляции между  $\xi$  и  $\phi$  отлична от нуля и равна

$$\overline{\langle \xi \sin 2\psi \rangle} = \frac{\omega_0}{4} \kappa(2\omega_0) = \frac{\omega_0}{2} K_1. \quad (9)$$

Аналогично, в уравнении (6)

$$\overline{\xi \cos^2 \psi} = \overline{\langle \xi \cos^2 \psi \rangle} + \zeta_2(t), \quad (10)$$

где

$$\overline{\langle \xi \cos^2 \psi \rangle} = \frac{\omega_0}{4} \int_{-\infty}^0 \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle \sin 2\omega_0\tau d\tau \equiv M, \quad (11)$$

$\zeta_2(t)$ , как и в (7), может рассматриваться как белый шум с нулевым средним значением и интенсивностью  $K_2$ , равной

$$K_2 = \frac{1}{4} \left( \kappa(0) + \frac{1}{2} \kappa(2\omega_0) \right), \quad (12)$$

Значение  $M$  определяется характером случайного процесса  $\xi(t)$ : если  $\xi(t)$  является белым шумом, то  $M = 0$ ; если же  $\xi(t)$  имеет конечное время корреляции, например, когда его спектральная плотность равна

$$\kappa(\omega) = \frac{\alpha^2 \kappa(2\omega_0)}{(\omega - 2\omega_0)^2 + \alpha^2},$$

то

$$M = -\frac{\alpha \omega_0^2 \kappa(2\omega_0)}{4(16\omega_0^2 + \alpha^2)}.$$

Учитывая (7)–(12), перепишем уравнения (5) и (6) в следующем виде:

$$\dot{A} = \left( -\beta - \frac{3}{4} \beta \tilde{\gamma} A^2 + \frac{\omega_0^2}{4} K_1 \right) A + \frac{\omega_0}{2} A \zeta_1(t), \quad (13)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{3}{8} \omega_0 \gamma A^2 + \omega_0 M + \omega_0 \zeta_2(t),$$

где  $\tilde{\gamma} = \gamma + \alpha\omega_0^2$ .

Уравнениям (13) соответствует следующее уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial w(A, \phi)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial A} \left( \left( \frac{\omega_0^2 K_1}{4} \eta - \frac{3}{4} \beta \tilde{\gamma} A^2 \right) A w(A, \phi) \right) - \quad (14)$$

$$\omega_0 \left( \frac{3}{8} \gamma A^2 - M \right) \frac{\partial w(A, \phi)}{\partial \phi} + \frac{K_1 \omega_0^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial A^2} (A^2 w(A, \phi)) + \frac{K_2 \omega_0^2}{2} \frac{\partial^2 w(A, \phi)}{\partial \phi^2},$$

где

$$\eta = 1 - \frac{4\beta}{\omega_0^2 K_1}.$$

Стационарное решение уравнения (14), удовлетворяющее условию равенства нулю потока вероятности, не зависит от  $\phi$ . Его удобно записать в виде

$$w(A, \phi) = \frac{C}{2\pi A^2} \exp \left\{ \int_0^A \left( \frac{2\eta}{A} - \frac{6\beta\tilde{\gamma}}{\omega_0^2 K_1} A \right) dA - \int_0^1 \frac{2\eta}{A} dA \right\}. \quad (15)$$

Постоянная  $C$  определяется из условия нормировки

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty w(A, \phi) A dA d\phi = 1.$$

Проинтегрировав (15) по  $\phi$  и вычислив интеграл под знаком экспоненты, найдем выражение для плотности распределения амплитуды колебаний:

$$w(A) = C A^{2\eta-1} \exp \left\{ -\frac{3\beta\tilde{\gamma}}{\omega_0^2 K_1} A^2 \right\}. \quad (16)$$

Из условия нормировки находим

$$C = 2 \begin{cases} \left( \frac{\omega_0^2 K_1}{3\beta\tilde{\gamma}} \right)^{-\eta} \frac{1}{\Gamma(\eta)} & \text{при } \eta \geq 0 \\ 0 & \text{при } \eta \leq 0 \end{cases}$$

и, следовательно,

$$w(A) = 2 \begin{cases} \left( \frac{\omega_0^2 K_1}{3\beta\tilde{\gamma}} \right)^{-\eta} \frac{1}{\Gamma(\eta)} A^{2\eta-1} \exp \left\{ -\frac{3\beta\tilde{\gamma}}{\omega_0^2 K_1} A^2 \right\} & \text{при } \eta \geq 0 \\ \delta(A) & \text{при } \eta \leq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Тот факт, что при  $\eta \leq 0$  плотность распределения амплитуд оказалась дельтаобразной, связан с тем, что мы не учли аддитивного шума<sup>2</sup>.

Используя выражение (17), можно найти  $\langle A \rangle$  и  $\langle A^2 \rangle$ :

$$\langle A \rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_0^2 K_1}{3\beta\tilde{\gamma}} \frac{\Gamma(\eta + 1/2)}{\Gamma(\eta + 1)}} \eta & \text{при } \eta \geq 0 \\ 0 & \text{при } \eta \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$\langle A^2 \rangle = \begin{cases} \frac{\omega_0^2 K_1}{3\beta\tilde{\gamma}} \eta & \text{при } \eta \geq 0 \\ 0 & \text{при } \eta \leq 0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что при  $\eta > 0$  имеет место параметрическое возбуждение колебаний маятника за счет шумового воздействия. Это проявляется в том, что средние значения амплитуды и квадрата амплитуды становятся отличными от нуля. Если наблюдать такие колебания и не знать их причины, то можно прийти к заключению, что они представляют собой хаотические автоколебания. Естественно возникает вопрос, можно ли отличить наблюдаемый процесс от хаотических автоколебаний. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

---

<sup>2</sup>Такой учет проведен Диментбергом [98].

## 2.2 Результаты численного моделирования уравнения колебаний маятника с колеблющейся осью подвеса

Поскольку полученные теоретические результаты, во-первых, не дают возможности найти форму колебаний маятника, индуцированных шумом, и, во-вторых, являются приближенными, мы численно исследовали решение уравнения

$$\ddot{\varphi} + 0.2(1 + \alpha\dot{\varphi}^2)\dot{\varphi} + (1 + \xi(t))\sin\varphi = 0, \quad (19)$$

где  $\xi(t)$  – достаточно широкополосный шум, спектральная плотность которого показана на рис.13.

В уравнение (19) включен член, описывающий нелинейное трение, для того чтобы избежать вращения маятника при интенсивностях шума, существенно превышающих критическое значение. Исследование показало, что при увеличении интенсивности шума выше критического значения ( $\kappa_{cr}(2) = 0.8$ ) средние значения мгновенной амплитуды колебаний маятника, вычисленной при помощи преобразования Гильберта (см., например, [99, 100]), и ее квадрата, как и следует из теории, становятся отличными от нуля и затем растут. Соответствующие зависимости показаны на рис.14 Мы видим, что на начальном участке они достаточно хорошо совпадают с теоретическими зависимостями, определяемыми формулой (18), которые были вычислены нами в предположении, что интенсивность шума близка к критическому значению.

В непосредственной близости от порога возбуждающиеся колебания весьма напоминают хаотические автоколебания, возникшие в результате потери устойчивости состояния равновесия за счет слияния, например, с неустойчивым предельным циклом и обладающие поэтому свойством перемежаемости [101]. Форма таких колебаний и проекции их фазового портрета на плоскость  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  показаны на рис. 3. Заметим, что турбулентность в области переходных чисел Рейнольдса также обладает свойством перемежаемости [89, 37, 102]. Не случайно, что первые обстоятельные работы по анализу этих явлений были написаны именно специалистами по турбулентности [91].

Если не вводить нелинейное трение, то уже при очень незначительном удалении интенсивности шума от критического значения маятник начинает время от времени проворачиваться на угол кратный  $2\pi$  (см. рис.15 *b*). Чтобы избежать этого неприятного явления, мы проводили расчеты при этих интенсивностях шума с учетом нелинейного трения. При удалении от критического значения длительность участков, где маятник колеблется вблизи положения равновесия, постепенно уменьшается и при достаточно большой величине интенсивности шума такие участки исчезают. Это продемонстрировано на рис.16.

Поскольку возбуждаемые колебания маятника вызваны исключительно шумовым воздействием, можно было бы ожидать, что им должна соответствовать бесконечно большая размерность соответствующего множества, построенного в некотором бесконечномерном пространстве. Однако проведенные нами расчеты корреляционной размерности как в обычном пространстве Такенса, так и с использованием методики улучшенного базиса [92], показали, что размерность является конечной. Об этом свидетельствует насыщение корреляционной размерности при увеличении размерности пространства вложения. Пример такого насыщения показан на рис.5. С ростом интенсивности шума размерность слабо увеличивается, но остается конечной (см. рис.18, где приведена зависимость корреляционной размерности  $\nu$  от относительной спектральной плотности шума  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2)$ ). Таким образом, как показало наше исследование, размерность не позволяет отличить шумоиндуцированные колебания от хаотических колебаний динамического происхождения, для которых размерность должна быть конечной. Пример таких колебаний рассмотрен ниже. Подчеркнем, что полученный результат противоречит широко принятым представлениям, согласно которым именно с помощью размерности можно отличить хаотические колебания в динамических системах от случайных колебаний, обусловленных шумом (см. [101]). Правда, в последнее время появилось несколько работ (см., например, [93, 94]), авторы которых показывают, что шумовые сигналы, имеющие спектр типа  $1/f^\alpha$ , могут иметь конечную корреляционную размерность (по крайней мере, для

$1 \leq \alpha \leq 3$ ). Однако, как мы увидим дальше, спектр наблюдаемых нами шумо-индуцированных колебаний не всегда имеет вид  $1/f^\alpha$ , тем не менее их размерность получилась конечной.

В связи с тем, что размерность, соответствующая шумоиндуцированным колебаниям маятника, является конечной, можно утверждать, что под действием шума в некотором фазовом пространстве, характеризующем движение маятника, например, в пространстве Такенса, индуцируется аттрактор.

Для сравнения рассмотрим хаотические колебания маятника, вызванные достаточно большими периодическими колебаниями оси подвеса. С учетом нелинейного трения эти колебания описываются уравнением

$$\ddot{\varphi} + 2(1 + \alpha\dot{\varphi}^2)\beta\dot{\varphi} + (1 + B \cos 2t) \sin \varphi = 0, \quad (20)$$

где  $B$  – относительная амплитуда колебаний ускорения оси подвеса. Поведение решения уравнения (20) при  $\alpha = 0$  и изменении параметра  $B$  было детально изучено в работе [95] путем численного моделирования. Мы повторили расчеты, проведенные в этой работе, для ряда значений амплитуды  $B$ , при которых колебания маятника являются хаотическими. Пример таких колебаний приведен на рис.19 *a*. Из рисунка видно, что маятник совершает нерегулярные вращения в ту и другую стороны, что приводит к медленному дрейфу угла поворота  $\varphi$ . Наличие нелинейного трения, если оно имеет достаточную величину, приводит к тому, что вращение исчезает, а маятник совершает только хаотические колебания относительно положения равновесия (рис.19 *b*). Корреляционная размерность аттрактора, соответствующего указанным хаотическим колебаниям маятника, при  $B = 3$ ,  $\alpha = 0$  равна  $2.51 \pm 0.05$ , а при  $B = 3.5$ ,  $\alpha = 2$  она равна  $2.09 \pm 0.03$ . Мы видим, что наличие нелинейного трения существенно уменьшает размерность.

Значительный интерес представляют также спектры возбуждаемых колебаний. В случае возбуждения маятника гармоническим воздействием при отсутствии нелинейного трения, когда маятник совершает нерегулярные вращения, спектр его колебаний содержит низкочастотную часть, обусловленную этими медленными вращениями; спек-

тральная плотность падает с ростом частоты, хотя и не монотонно (см. рис.8 *a*). При наличии нелинейного трения низкочастотная часть спектра оказывается существенно меньше, и в спектре имеются ярко выраженные максимумы на частотах, кратных собственным (рис.8 *b*).

В случае маятника, возбуждаемого шумом, без учета нелинейного трения, при интенсивностях шума, близких к критическому значению, спектр колебаний имеет максимум на частоте, близкой к собственной (рис.21 *a*). При увеличении интенсивности шума этот максимум уменьшается и в конце концов исчезает (рис.21 *b*). В результате спектр становится монотонно спадающим, подобным спектру фликкер-шума. При больших интенсивностях шума спектр может быть аппроксимирован степенной зависимостью вида  $1/f^n$ , где для  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 22$  мы получили  $n = 12$  (рис.21 *c*). При наличии нелинейного трения поведение спектра качественно является таким же (см. рис.21 *c*, *d* и *e*). Только при достаточно большой интенсивности шума, когда спектр становится монотонно спадающим, в полулогарифмическом масштабе его удастся аппроксимировать двумя участками прямых (рис.21 *f*). Корреляционные функции сигналов для параметров, соответствующих рис. *c* и *j*), приведены на рис.22. Мы видим, что время корреляции сигналов достаточно мало, так что утверждение авторов работ [93, 94] о том, что сигналы со спектром  $1/f^\alpha$  имеют конечную размерность потому, что время корреляции для них очень велико, в нашем случае не является справедливым.

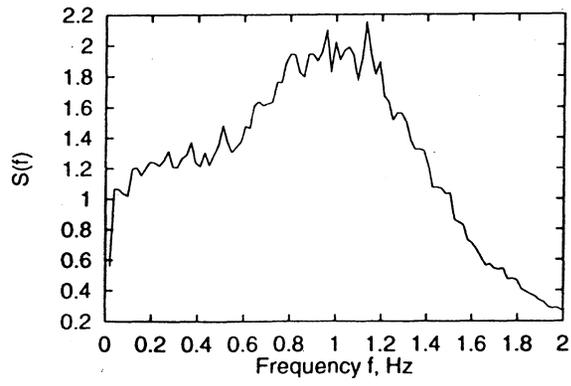


Рис. 13: Спектральная плотность шума  $\xi(t)$ .

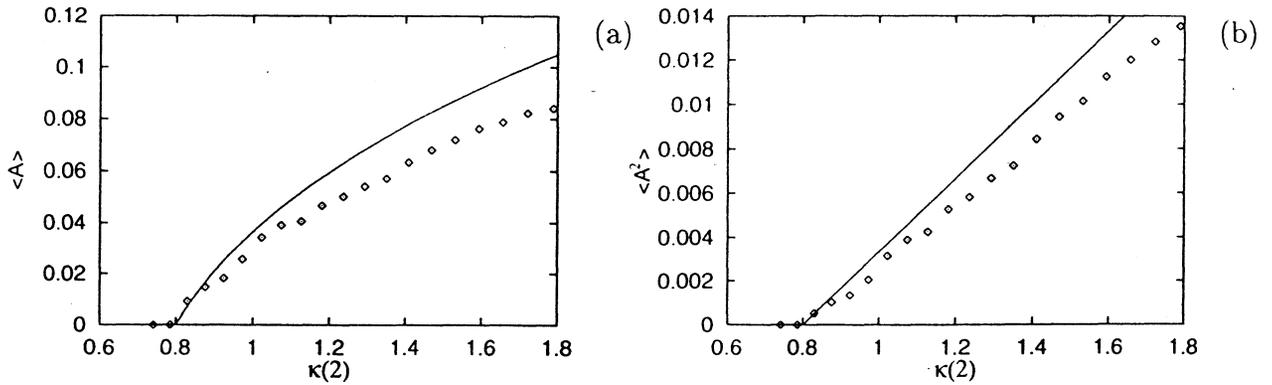


Рис. 14: Зависимости  $\langle A \rangle$  (a) и  $\langle A^2 \rangle$  (b) от спектральной плотности шума  $\kappa(2)$  (точки). Сплошными линиями показаны соответствующие теоретические зависимости, вычисленные по формуле (18).

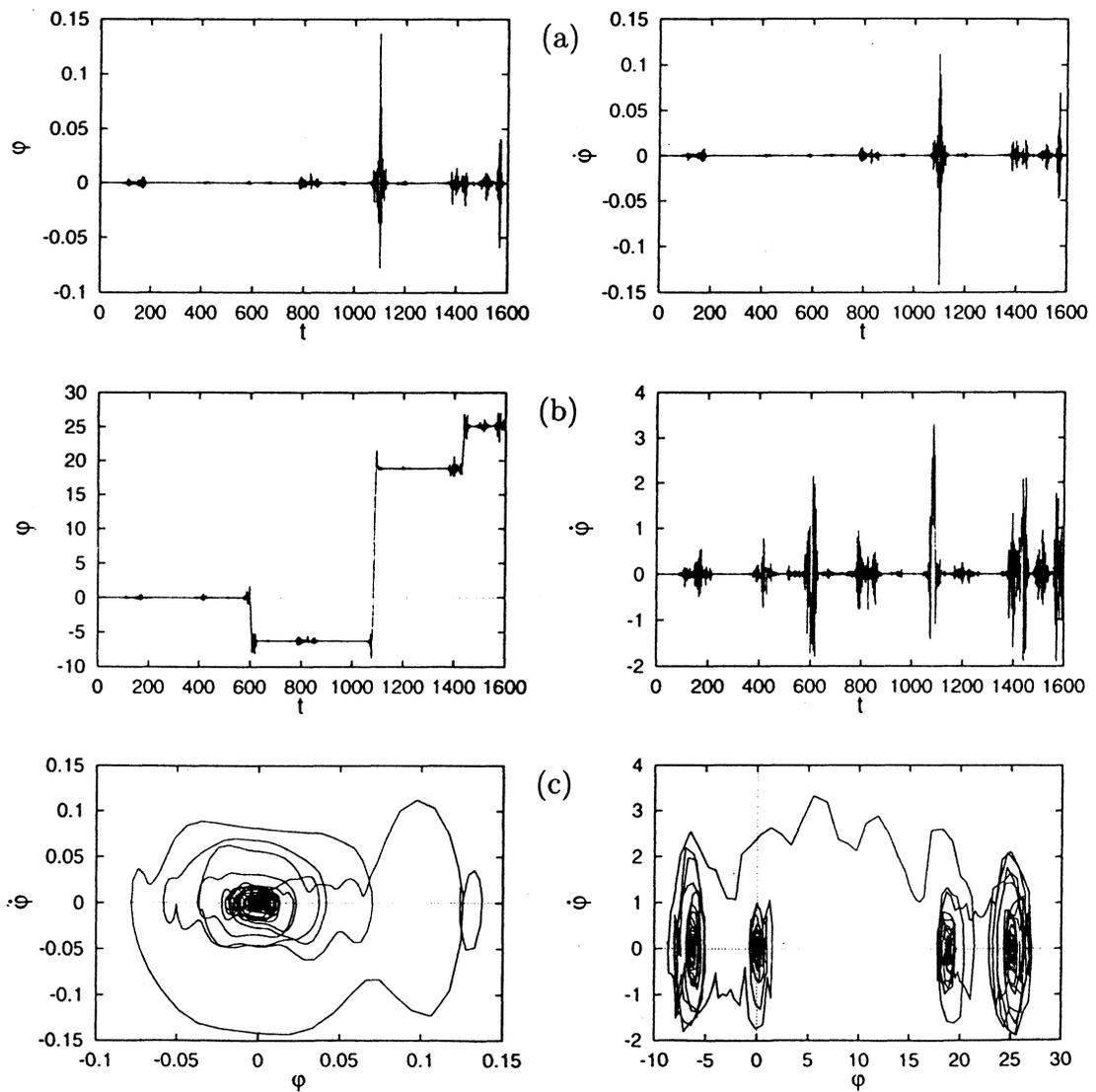


Рис. 15: Зависимости  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  при  $\alpha = 0$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.01$  (a) и  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.06$  (b); проекции соответствующих фазовых портретов на плоскость  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  (c).

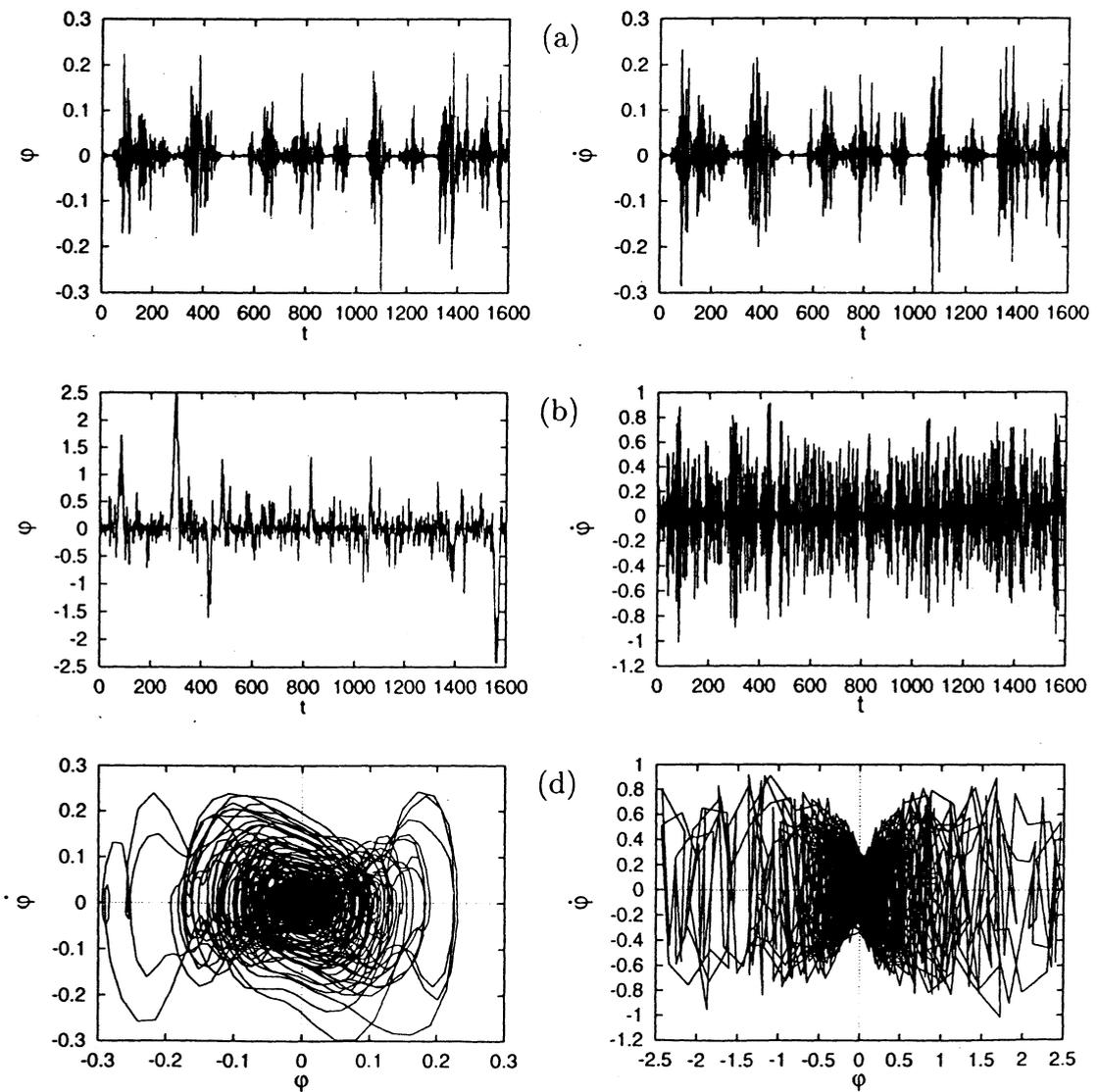
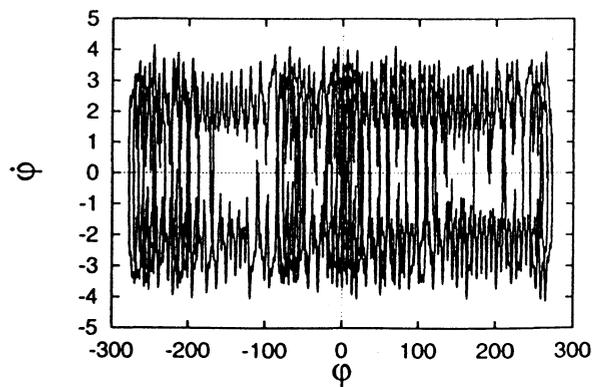
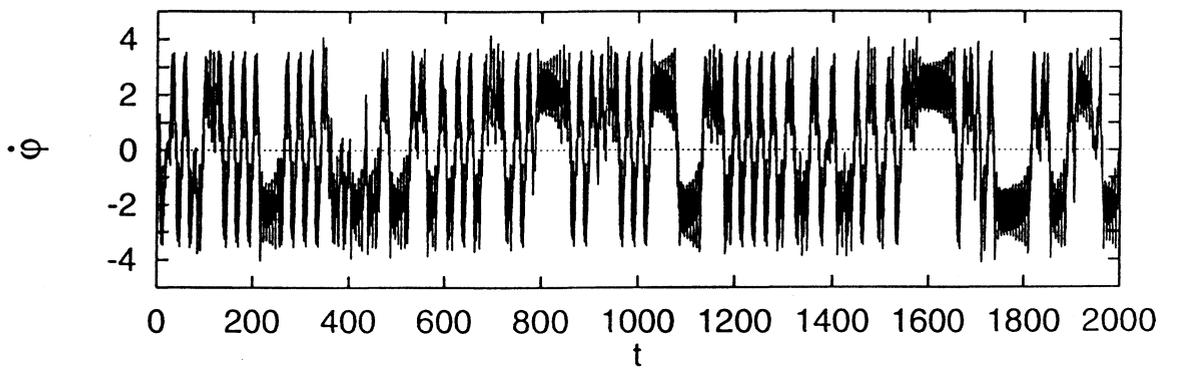
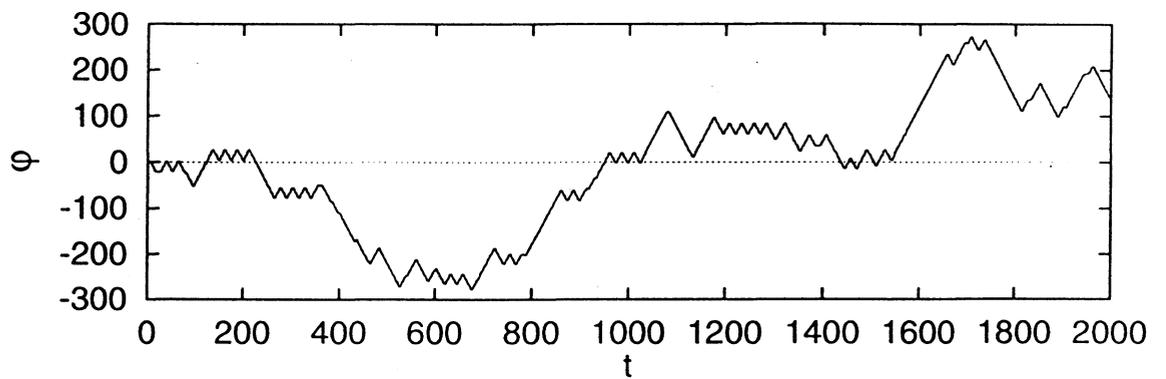


Рис. 16: Зависимости  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  при  $\alpha = 100$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.25$  (a) и  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  (b); проекции соответствующих фазовых портретов на плоскость  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  (c).

(a)



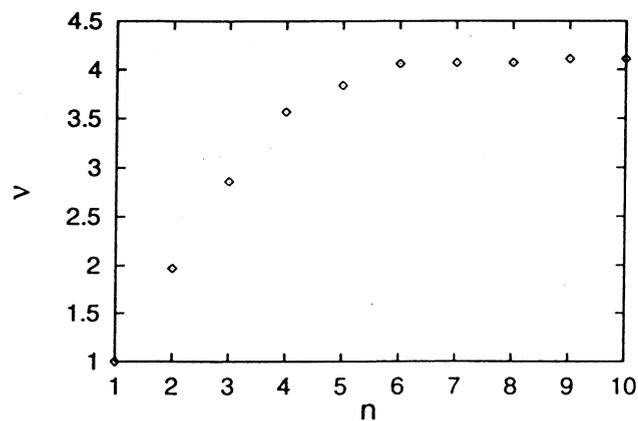


Рис. 17: Зависимость корреляционной размерности  $\nu$  от размерности пространства вложения  $n$  при  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$ ,  $\alpha = 100$ .

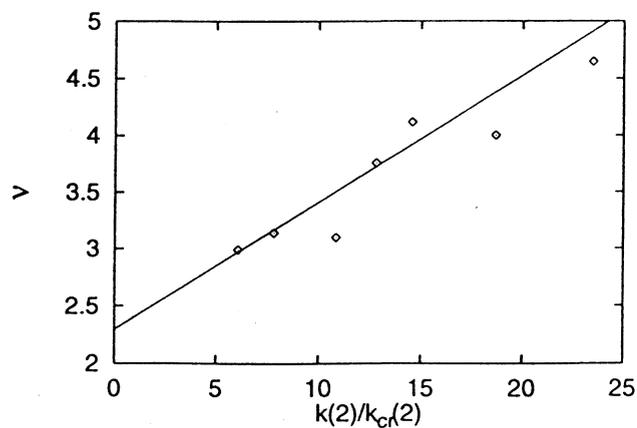


Рис. 18: Зависимость корреляционной размерности  $\nu$  от относительной спектральной плотности шума  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2)$  при  $\alpha = 100$ . Сплошной линией показана аппроксимационная кривая, полученная методом наименьших квадратов.

(b)

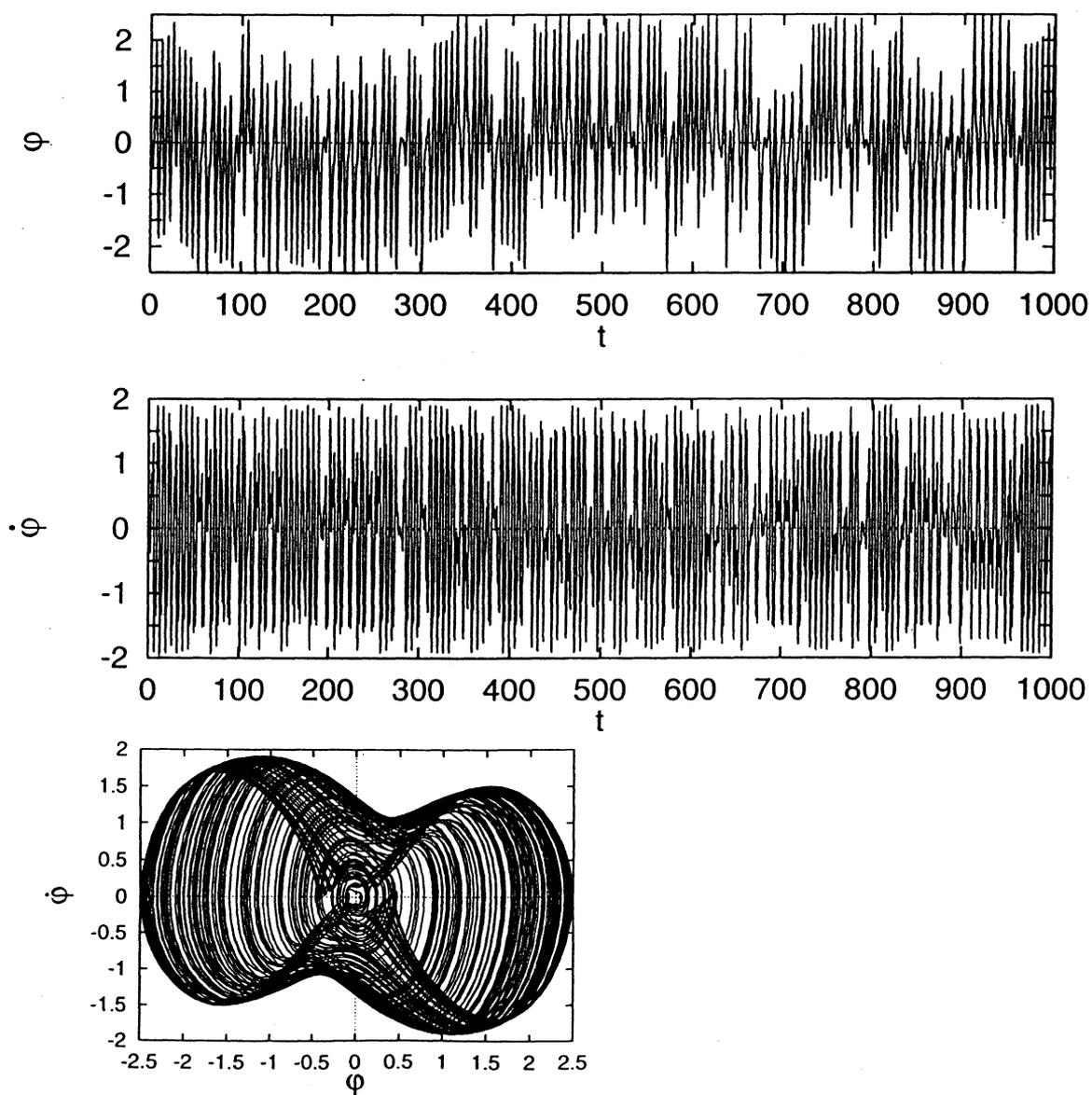


Рис. 19: Решение уравнения (20) и проекции фазовых портретов на плоскость  $\varphi, \dot{\varphi}$  при  $B = 3, \alpha = 0$  (a),  $B = 3.5, \alpha = 2$  (b).

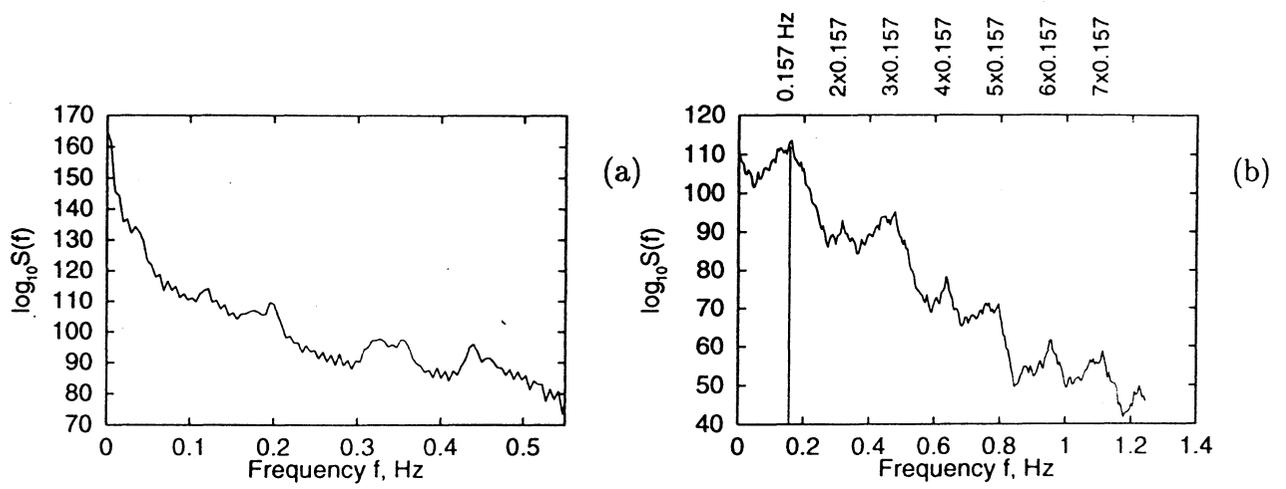


Рис. 20: Спектральные плотности решения уравнения (20) при  $B = 3, \alpha = 0$  (a) и  $B = 3.5, \alpha = 2$  (b).

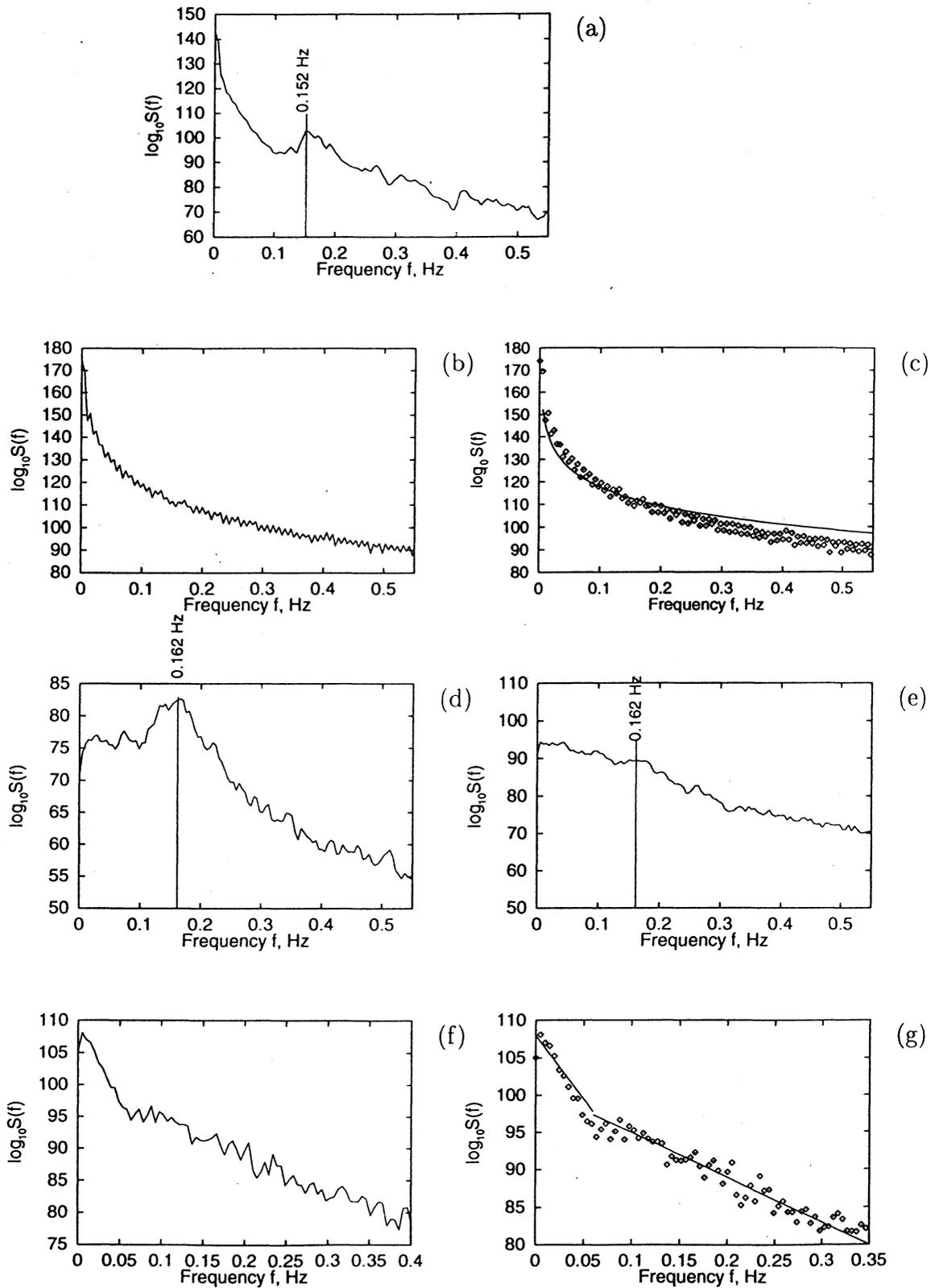


Рис. 21: Спектральные плотности решения уравнения (19) при  $\alpha = 0$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.06$  (a) и  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 22$  (b);  $\alpha = 100$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.25$  (d),  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 4.6$  (e),  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  (f). Аппроксимация логарифма спектральной плотности при  $\alpha = 0$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 22$  зависимостью  $90 - 12 \log f$  (c); аппроксимация логарифма спектральной плотности при  $\alpha = 100$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  участками двух прямых:  $108 - 170f$  для  $f \leq 0.06$  и  $101 - 60f$  для  $f \geq 0.06$  (g)

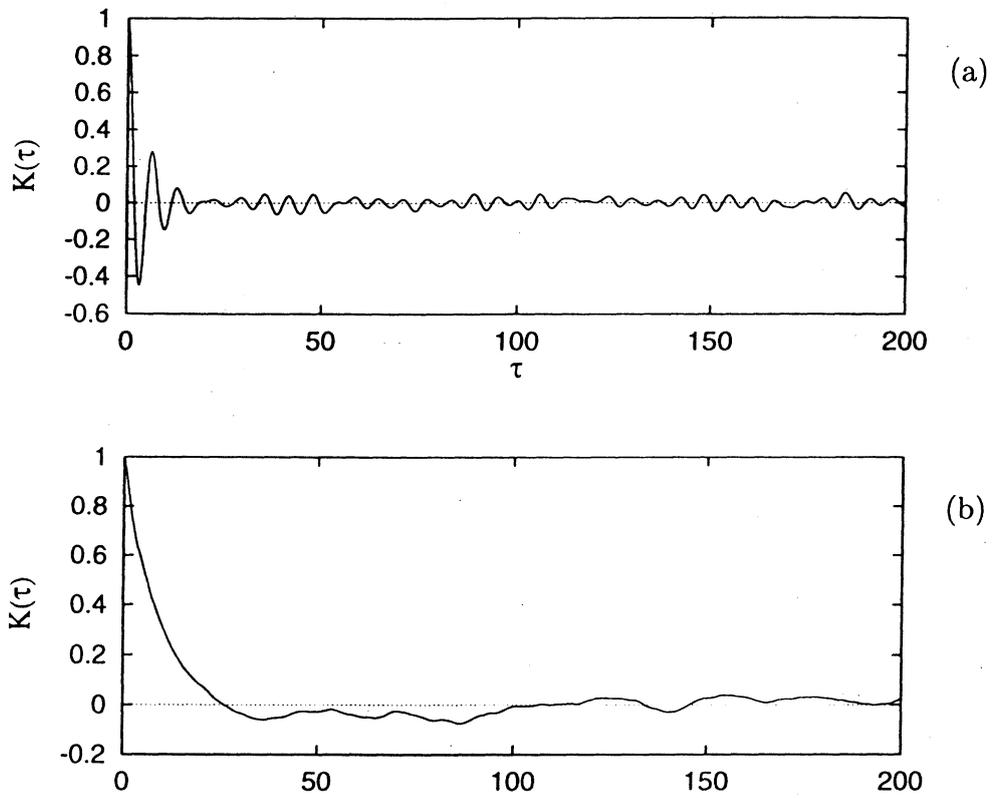


Рис. 22: Корреляционные функции для решений уравнения (19) при  $\alpha = 100$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.25$  (a) и  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  (b).

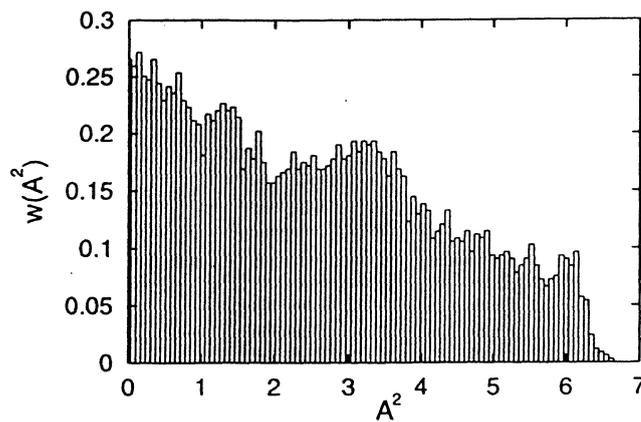


Рис. 23: Гистограмма распределения вероятностей квадрата мгновенной амплитуды колебаний для  $\alpha = 2$ ,  $B = 3.5$ .

### 2.3 Критерий Рытова–Диментберга

Вернемся теперь к вопросу о том, можно ли отличить шумоиндуцированные колебания от хаотических колебаний динамического происхождения. Подобный вопрос был поставлен в книгах С.М. Рытова [99] и М.Ф. Диментберга [98], но применительно к задаче различения шумового сигнала, пропущенного через линейный узкополосный фильтр, и периодических, но зашумленных автоколебаний. Там было показано, что в случае зашумленных автоколебаний плотность вероятностей для квадрата их мгновенной амплитуды, которую в случае широкополосного процесса можно определить путем преобразования Гильберта, должна иметь максимум при некотором конечном значении амплитуды, тогда как для шума, прошедшего через фильтр, она должна монотонно уменьшаться. Можно ожидать, что в случае хаотических колебаний динамического происхождения плотность вероятностей для квадрата мгновенной амплитуды также должна иметь максимум при одном или нескольких конечных значениях амплитуды. Такой результат действительно получен нами для рассмотренных выше хаотических колебаний маятника, вызванных периодическими колебаниями оси подвеса. На рис.23 показана гистограмма распределения вероятностей квадрата мгновенной амплитуды колебаний, определенной путем преобразования Гильберта. Видно, что распределение вероятностей не является монотонно спадающим, а имеет несколько слабо выраженных максимумов.

В случае возбуждения колебаний маятника за счет случайных колебаний оси подвеса распределение вероятностей для величины  $x = \tilde{\gamma} A^2$ , как следует из теоретических результатов, приведенных в первом разделе, равно  $\tilde{w}(x) = w(\sqrt{x/\tilde{\gamma}})/2\sqrt{\tilde{\gamma}x}$ , где  $w(\sqrt{x/\tilde{\gamma}})$  определяется выражением (17). Зависимость  $\tilde{w}(x)$  для  $\eta = 0.2$  продемонстрирована на рис.24 а. Мы видим, что плотность вероятности для квадрата амплитуды, вычисленная аналитически, монотонно уменьшается с ростом амплитуды. Такой же результат получен и при численном моделировании уравнения (19) (рис.24 б и с). Таким образом, несмотря на существен-

но нелинейное преобразование шума, критерий Рытова–Диментберга в рассматриваемом случае оказывается справедливым. Безусловно, вопрос о справедливости указанного критерия в общем случае требует более детального исследования.

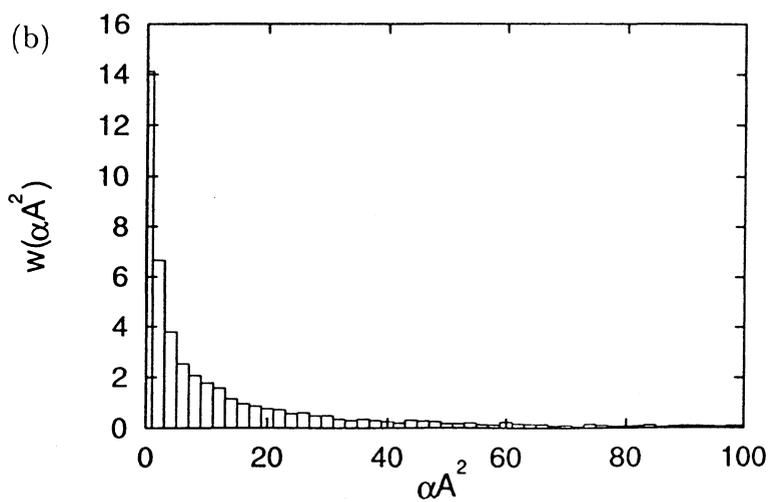
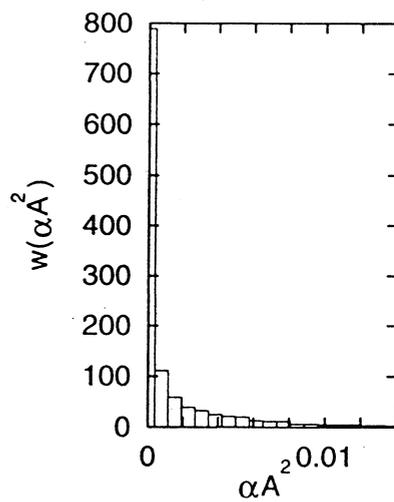
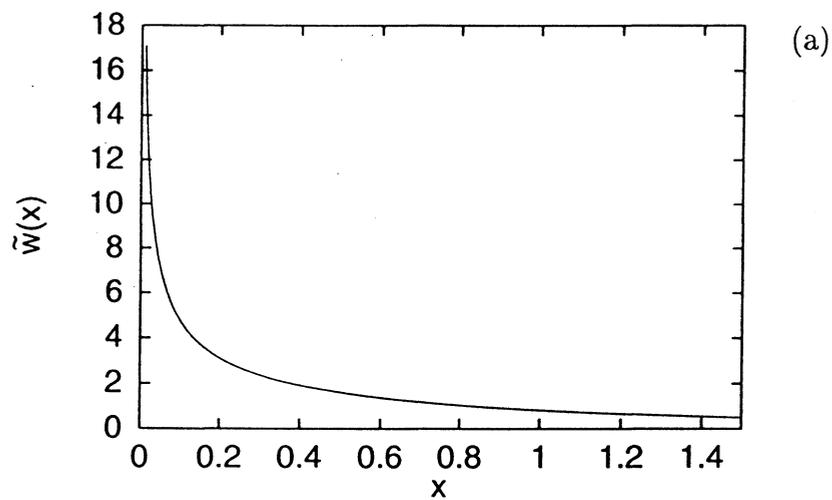


Рис. 24: Теоретическая зависимость  $\tilde{w}(x) = (2\tilde{\gamma}^\eta/C) w(x)$  при  $\eta = 0.2$  (a) и гистограммы распределения вероятностей для  $\alpha A^2$ , полученные при численном решении уравнения (19) для  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.25$  (б) и  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  (б).

## 2.4 Возбуждение колебаний маятника со случайно колеблющейся осью подвеса как шумоиндуцированный фазовый переход. Критерий Климонтовича об упорядоченности движения

Возбуждение колебаний маятника за счет шумового параметрического воздействия можно трактовать как возникновение в рассматриваемой системе при  $\eta = 0$  неравновесного фазового перехода 2-го рода. В качестве параметра порядка, характеризующего этот переход, можно принять либо  $\langle A \rangle$ , либо  $\langle A^2 \rangle$ . При таком выборе параметра порядка, как следует из 18 и 14, критический индекс равен 1.

Для того чтобы убедиться, что при рассматриваемом переходе движение в системе становится более упорядоченным, воспользуемся критерием, предложенным Климонтовичем [104, 103], суть которого заключается в следующем. В исследуемой системе выбираются два состояния, соответствующие разным значениям некоторого управляющего параметра  $a$ . Одно из этих состояний, соответствующее  $a = a_0$ , условно принимается за состояние *физического хаоса*. Плотность вероятности для набора переменных  $X$ , описывающих состояние системы, обозначим  $w(X, a)$ . Представим  $w(X, a_0) \equiv w_0(X)$  в виде канонического распределения Гиббса

$$w_0(X) = \exp \left\{ \frac{F_0(D_0) - H(X, a_0)}{D_0} \right\}, \quad (21)$$

где  $F_0$  – свободная энергия,  $H(X, a_0)$  – функция Гамильтона,  $D_0$  – температура в соответствующих единицах. Обозначим

$$\frac{F_0(D_0) - H(X, a_0)}{D_0} = -H_{ef}$$

и примем  $H_{ef}$  за эффективную функцию Гамильтона, не зависящую от параметра  $a$ . Очевидно, что среднее значение эффективной функции Гамильтона, равное эффективной энергии, в общем случае зависит от  $a$ . Климонтович предлагает перенормировать начальное распределение вероятностей таким образом, чтобы эффективная энергия в начальном состоянии (при  $a = a_0$ ) и в конечном (при  $a = a_0 + \Delta a$ ) совпа-

дали. Для этого вводится перенормированная плотность вероятности  $\tilde{w}_0(X, a, \Delta a)$ , удовлетворяющая условию

$$\int H_{ef} \tilde{w}_0(X, a, \Delta a) dX = \int H_{ef} w(X, a_0 + \Delta a) dX. \quad (22)$$

В уравнении 22 плотность вероятности  $\tilde{w}_0(X, a, \Delta a)$ , как и  $w_0(X)$ , может быть представлена в виде канонического распределения Гиббса

$$\tilde{w}_0(X, a, \Delta a) = \exp \left\{ \frac{F(D) - H_{ef}}{D} \right\}, \quad (23)$$

где  $F(D)$  – эффективная свободная энергия,  $D$  – эффективная температура, зависящая от  $\Delta a$ . Неизвестная функция  $F(D)$  определяется из условия нормировки

$$\int \tilde{w}_0(X, a, \Delta a) dX = 1, \quad (24)$$

а зависимость  $D$  от  $\Delta a$  находится из уравнения 22. Сравнивая 21 и 23, видим, что  $D(0) = 1$  и  $F(1) = 0$ .

Климонтovich утверждает, что если найденное таким образом значение  $D(\Delta a)$  больше единицы, то состояние системы при  $a = a_0 + \Delta a$  является более упорядоченным, чем состояние при  $a = a_0$ , т.е. в этом случае последнее правильно было принято нами за состояние физического хаоса<sup>3</sup>. Количественной мерой степени упорядоченности движения при изменении  $a$  от  $a_0$  до  $a_0 + \Delta a$ , согласно Климонтovichу, является разность энтропий  $\tilde{S}_0 = - \int \tilde{w}_0(X, a, \Delta a) \ln \tilde{w}_0(X, a, \Delta a) dX$  и  $S = - \int w(X, a_0 + \Delta a) \ln w(X, a_0 + \Delta a) dX$ . Из условий нормировки и уравнения 22 следует, что

$$\Delta S = \tilde{S}_0 - S = \int w \ln \frac{w}{\tilde{w}_0} dX. \quad (25)$$

Заметим, что величина  $\Delta S$ , определяемая выражением 25, не может быть отрицательной, даже если бы мы неправильно выбрали состояние физического хаоса, т.е. получили бы, что  $D < 1$ . Это связано с тем,

<sup>3</sup>Все это справедливо, если при обратном переходе от  $a$  к  $a - \Delta a$  значение  $D$  получается меньше единицы. В противном случае ситуация является более сложной. Мы будем считать, что именно первая, самая простая, ситуация имеет место.

что, как нетрудно показать исходя из интегрального представления логарифма,  $\ln x \geq 1 - 1/x$ .

Вернемся теперь к нашей задаче и примем за физический хаос состояние, соответствующее  $\eta = \eta_0$ , а за состояние, степень упорядоченности которого мы хотим определить, примем состояние, соответствующее  $\eta > \eta_0$ . Полагая  $\eta, \eta_0 \ll 1$  и проделав все указанные выше вычисления, мы найдем, что  $D = 1 + 2(\eta - \eta_0)(1 + 2\eta + 3\eta^2 + \dots)$ , т.е. состояние физического хаоса выбрано нами правильно. Вычисление разности энтропий  $\delta S$  довольно громоздко, но можно показать, что  $\delta S \sim \eta^2(\eta - \eta_0)$ . Найденные выражения справедливы и при  $\eta_0 = 0$ . Таким образом, мы получили, что при рассмотренном выше фазовом переходе движение с точки зрения критерия Климонтовича становится более упорядоченным.

## 2.5 Перемежаемость типа "Включено-выключено" в модели маятника со случайно колеблющейся осью подвеса

Выше было показано, что при увеличении интенсивности шума возбуждение колебаний происходит через перемежаемость особого рода.

Пример шумоиндуцированных колебаний маятника показан на рис.25. Из рисунка можно увидеть, что близко к порогу возбуждения колебания маятника обладают свойством перемежаемости особого рода (Перемежаемость такого рода описана, к примеру, в [111, 101, 112]), а именно в течении сравнительно долгого времени маятник колеблется в небольшой окрестности положения равновесия (так называемая "ламинарная" фаза), затем маленькие колебания сменяются коротким мощным всплеском ("турбулентная фаза"). Вдали от порогового значения интенсивности шума продолжительности ламинарных фаз уменьшаются, а турбулентных увеличиваются и в конце концов ламинарные фазы пропадают. Дисперсия колебаний маятника увеличивается в ходе этого процесса. Интересно, что в случае маятника наблюдаемый тип перемежаемости отличается от описанных в [111, 101, 112], хотя внешне они похожи. Это так называемая перемежаемость типа "Включено-выключено". Этот термин был недавно предложен Платтом и др. в [113], хотя отображение, связанное с подобным типом перемежаемости было впервые рассмотрено Пиковским [44], а затем Фуджисака и Ямада [114]. Существенно, что этот тип перемежаемости появляется не только в динамических, но так же и в стохастических системах [115]. В [115] статистические свойства перемежаемости типа "Включено-выключено" были получены из анализа отображения

$$x_{n+1} = a(1 + z_n)x_n + f(x_n),$$

где  $z_n$  является либо детерминистическим хаотическим, либо случайным процессом,  $a$  бифуркационный параметр, и  $f(x_n)$  нелинейная функция. Было показано, что для этого отображения средняя продолжительность ламинарной фазы пропорциональна  $a^{-1}$ .

Вычислим среднюю продолжительность ламинарной фазы (время перемежаемости) для нашей системы, т.е. для уравнений 13 и уравне-

ния Фоккера-Планка 14, соответствующего 13. Для этого необходимо решить задачу первого достижения границы. Будем предполагать, что маятник колеблется в ламинарной фазе, если амплитуда его колебаний  $A$  не превышает определенного значения  $\epsilon$ . Тогда среднее значение ламинарной фазы  $\tau_\epsilon$  определяется средним временем случайного блуждания отображающей точки внутри окружности радиуса  $\epsilon$  на плоскости  $\varphi, \dot{\varphi}$ . Это время может быть определено (см. [116, 70, 101]), используя стационарное решение уравнения 14 с граничными условиями

$$w(A, \phi)|_{A=\epsilon} = 0. \quad (26)$$

Поскольку значение  $\epsilon$  предполагается маленьким, то можно пренебречь величиной  $(3/4)\beta\tilde{\gamma}A^2$  в уравнении 14. Таким образом решение уравнения 14 с граничными условиями 26 запишется в виде

$$w(A, \phi) = \frac{8G_0}{\omega_0^2 K_1 (1 - 2\eta) A} (\epsilon^{1-2\eta} A^{2\eta-1} - 1), \quad (27)$$

где  $G_0$  это значение потока вероятности

$$G = \frac{\omega_0^2 K_1}{4} \left( \eta A w - \frac{1}{2} \frac{d}{dA} (A^2 w) \right)$$

через любую окружность внутри окружности радиуса  $\epsilon$ . Значение  $G_0$  может быть определено из условия нормировки интегрированием выражения 27 по окружности радиуса  $\epsilon$ . В [116, 70] было показано, что среднее время достижения границы окружности равно  $G_0^{-1}$ . Учитывая, что отображающая точка, коснувшаяся границы окружности, может вернуться обратно с определенной вероятностью  $p$ , можно получить, что средняя продолжительность ламинарной фазы  $\tau_\epsilon$  будет определяться выражением:

$$\tau_\epsilon = G_0^{-1} (1 - p) \sum_{j=1}^{\infty} j p^{j-1}.$$

Суммируя ряд и учитывая выражение для  $G_0$ , получается, что

$$\tau_\epsilon = G_0^{-1} (1 - p)^{-1} = \frac{8\pi\epsilon}{\omega_0^2 K_1 \eta (1 - p)} = \frac{16\pi\epsilon}{\omega_0^2 (\kappa(2\omega_0) - \kappa_c r) (1 - p)}. \quad (28)$$

Очевидно, что  $p < 1/2$ , поскольку сила, действующая на отображающую точку на границе окружности, направлена внутрь этой окружности.

Для маленьких  $\eta$  и  $\epsilon$  эта сила очень мала и значение  $p$  близко к  $1/2$ . В этом случае  $\tau_\epsilon = 2G_0^{-1}$ . По мере увеличения  $\eta$  и  $\epsilon$  вероятность  $p$  уменьшается.

Из 28 следует, что для маленьких  $\eta$  и  $\epsilon$  средняя продолжительность ламинарной фазы прямо пропорциональна  $\epsilon$  и обратно пропорциональна  $\eta$ .

Полученный результат хорошо согласуется с расчетами для относительно простого отображения, проведенными в [115]. Численные решения уравнения 1 показывают, что для маленьких  $\eta$  и  $\epsilon$  выражение 28 является хорошим приближением при  $p = 1/2$ , тогда как для больших значений  $\epsilon$  наблюдаются расхождения между численными и аналитическими расчетами. Зависимости  $\tau_\epsilon$  от  $\kappa(2\omega_0) - \kappa_{cr}$  для двух значений  $\epsilon$ , полученные численным расчетом, показаны на рис.14. Соответствующие теоретические зависимости изображены на том же рисунке сплошными линиями. Расхождение между теоретическими и численными зависимостями для больших значений  $\kappa(2\omega_0) - \kappa_{cr}$  могут быть объяснены нелинейной зависимостью  $p$  от  $\kappa(2\omega_0) - \kappa_{cr}$  и использованным приближением малого  $\epsilon$ .

Возбуждение колебаний маятника благодаря случайной вибрации оси подвеса, как было показано, проявляет себя в том, что дисперсия колебаний становится отличной от нуля. Рассмотрим влияние аддитивного шума. На рис.27 показана зависимость дисперсии величины  $\varphi$  от относительной интенсивности шума  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr}$  при отсутствии аддитивного шума (квадраты) и при его присутствии (окружности). Видно, что при присутствии аддитивного шума переход становится менее различимым, так как зависимость  $\overline{\varphi^2}$  от  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr}$  в этом случае более гладкая. В этом случае перемежаемость типа "Включено-выключено" может наблюдаться только, если интенсивность мультипликативного шума меньше пороговой и колебания вызваны аддитивным шумом (см. рис.28).

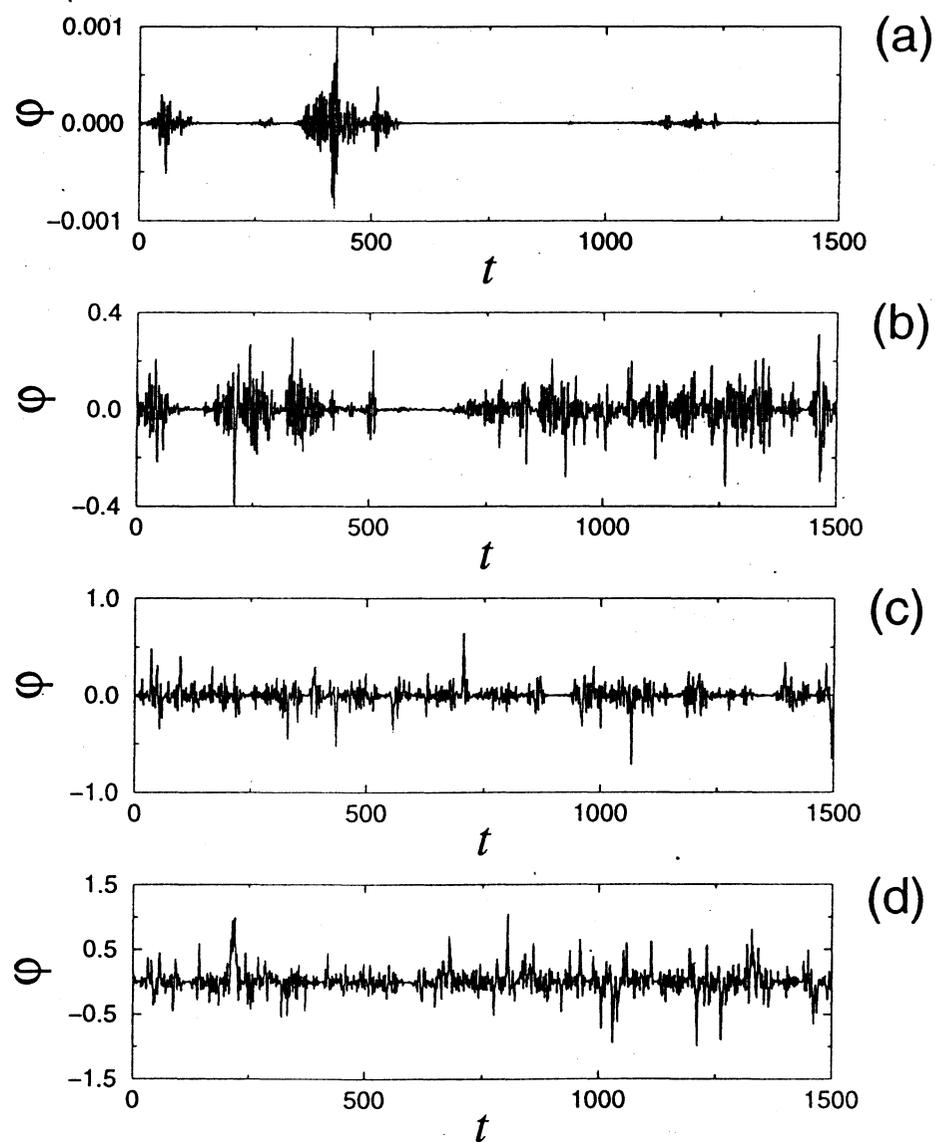


Рис. 25: Зависимость  $\varphi(t)$  для  $\omega_0 = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = 100$ , ( $k = 0$ ), и различных значений интенсивности шума: (a)  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.01$ , (b)  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.5$ , (c)  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 2.44$ , and (d)  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 6.25$ .

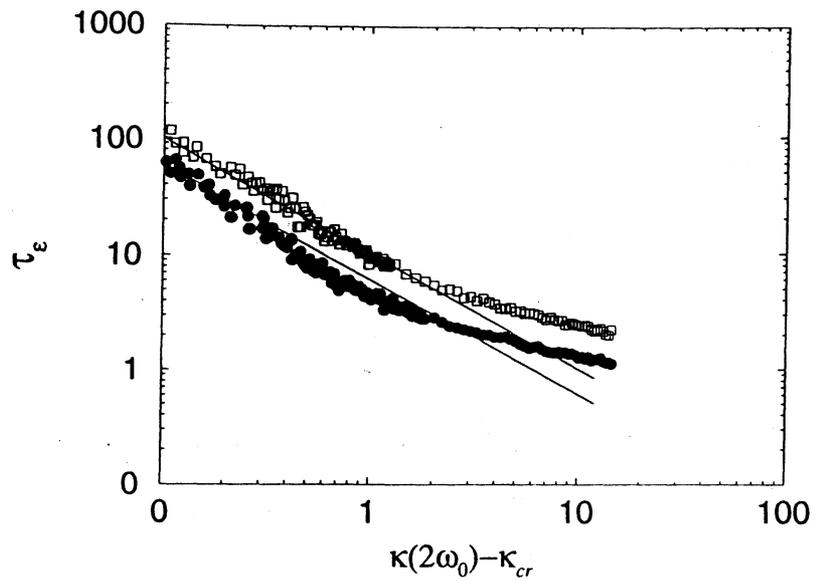


Рис. 26: Зависимость средней продолжительности ламинарной фазы  $\tau_\epsilon$  от превышения интенсивности шума над ее пороговым значением  $\kappa(2\omega_0) - \kappa_{cr}$  для  $\epsilon = 0.06$  (кружки) и  $\epsilon = 0.1$  (квадратики), полученные численным расчетом. Соответствующие теоретические зависимости показаны сплошными линиями.

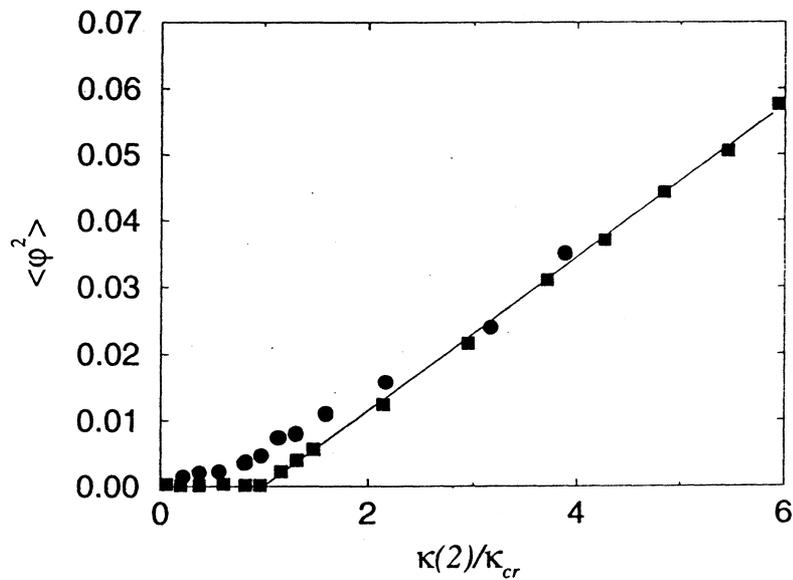


Рис. 27: Зависимость  $\overline{\varphi^2}$  от  $\kappa(2)/\kappa_{cr}$  в отсутствие аддитивного шума (квадратики) и с учетом аддитивного шума при  $\overline{k^2\xi_2^2} = 0.0025\xi_1^2$  (кружки) (Прямая  $\overline{\varphi^2} = 0.01151(\kappa(2)/\kappa_{cr} - 1)$  показана сплошной линией.)

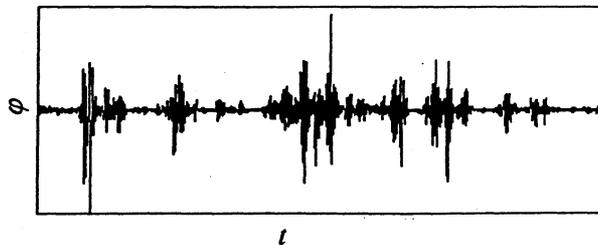


Рис. 28: Перемежаемость типа "Включено-выключено" в присутствии аддитивного шума. Интенсивность мультипликативного шума меньше порогового значения: динамика  $\varphi(t)$  показана для следующих значений параметров  $\overline{k^2\xi_2^2} = 0.000125\xi_1^2$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr} = 0.92$ .

### Глава 3. Управление шумоиндуцированными колебаниями и аналогия между шумоиндуцированными колебаниями маятника со случайно колеблющейся осью подвеса и турбулентными процессами в струях

В этой главе рассмотрено дополнительное гармоническое (синхронное или асинхронное) воздействие на шумоиндуцированные колебания в маятнике. Показано, что низкочастотное воздействие может вызвать шумоиндуцированный переход, если интенсивность шума ниже порога и усилить шумоиндуцированные колебания, если интенсивность шума превышает пороговое значение. В то же время высокочастотное воздействие всегда подавляет шумоиндуцированные колебания. Низкочастотное и высокочастотное воздействие является асинхронным и следовательно не влияет на среднюю частоту шумоиндуцированных колебаний маятника. Однако в определенном интервале частоты воздействия имеет место синхронизация шумоиндуцированных колебаний в том смысле, что средняя частота этих колебаний приближенно равна частоте воздействия. Настоящее исследование инициировано известными работами по интенсификации и подавлению турбулентных пульсаций в дозвуковой струе слабым акустическим облучением [120, 121, 122]. Как уже было сказано, одной из целей настоящего исследования является подтверждение аналогии между турбулентными процессами в незамкнутых потоках и шумоиндуцированными колебаниями в маятнике [123, 36].

Другой целью является нахождение общего и различного в реакции на внешнее воздействие систем с шумоиндуцированным и обычным аттракторами.

Уравнение, описывающее шумоиндуцированные колебания в маятнике с учетом дополнительного гармонического воздействия и аддитивного шума, выглядит следующим образом:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta(1 + \alpha\dot{\varphi}^2)\dot{\varphi} + \omega_0^2(1 + \xi_1(t) + a \cos \omega_a t) \sin \varphi = k\xi_2(t), \quad (29)$$

где  $\varphi$  это угловое отклонение маятника от положения равновесия,  $\beta$  и  $\alpha$  коэффициенты линейного и нелинейного трения,  $\omega_0$  частота малых колебаний маятника,  $\xi_1(t)$  ускорение оси подвеса – шум,  $k\xi_2(t)$  аддитивный белый шум,  $a$  и  $\omega_a$  амплитуда и частота, соответственно, дополнительного воздействия на ось подвеса.

### 3.1 Возбуждение и усиление колебаний маятника низкочастотным гармоническим воздействием

Сначала рассмотрим случай, когда  $k = 0$ . Если интенсивность случайных колебаний оси подвеса ниже своего критического значения, тогда дополнительное низкочастотное воздействие на ось подвеса может вызвать возбуждение колебаний маятника. Результаты численных расчетов уравнения Eq. (29) для  $\kappa(2\omega_0) < \kappa_{cr}$  и различных значений  $a$  представлены на рис. 29 *a, b*. Видно, что в этом случае возбуждение колебаний носит пороговый характер с амплитудой порога, зависящей от  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr}$ . Для  $\omega_a = 0.3$ ,  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 0.51$  пороговое значение  $a$  равно 1.15. Для  $a > a_{cr}$  возбужденные колебания практически не отличаются от колебаний возбужденных только случайным воздействием. Как и в последнем случае возбуждение колебаний происходит через перемежаемость типа "Включено- выключено". При увеличении  $a$  средняя продолжительность ламинарной фазы  $\tau$  будет уменьшаться. Зависимость  $\tau$  от  $a$  показана на рисунке 30 *a* вместе с зависимостью  $\tau = 0.44/(a^2 - a_{cr}^2)$ ,  $a_{cr} = 1.15$ , угаданной из формы укороченных уравнений [87].

Интенсивность колебаний увеличивается с увеличением  $a$ . Зависимость среднеквадратичного колебаний  $\sigma = \overline{\varphi^2}^{1/2}$  от разницы между амплитудой  $a$  и ее пороговым значением  $a_{cr}$  является приблизительно линейной, как было получено из численных расчетов (31 *a*). Таким образом, низкочастотное воздействие вызывает шумоиндуцированный фазовый переход и рождение индуцированного аттрактора.

Заметим, что в присутствие аддитивного шума перемежаемости не возникает и порог фазового перехода становится гладким.

Если интенсивность случайных колебаний оси подвеса превышает ее пороговое значение, т.е.  $\kappa(2\omega_0) > \kappa_{cr}$ , дополнительное низкочастотное воздействие значительно усиливает шумоиндуцированные колебания. Зависимость  $\sigma$  от  $a$  for  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 1.89$ ,  $\omega_a = 0.3$  для этого случая показана на рисунке 31 *b*. Видно, что малое воздействие не оказывает большого влияния на колебания маятника. Но, начиная с определенного значения амплитуды, интенсивность колебаний значительно

возрастает.

Возбуждение шумоиндуцированных колебаний маятника может рассматриваться как аналог хорошо известного явления асинхронного возбуждения автоколебаний [124, 12, 70, 87], хотя есть существенные отличия.

Продemonстрируем этот эффект на примере гармонически возбуждаемого генератора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + (\eta - \alpha x^2 + \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 B \cos \omega t. \quad (30)$$

Если частота внешней силы сильно отличается от резонансного значения, то удобно сделать подстановку в уравнение (30)

$$x = F \cos \omega t + y, \quad (31)$$

где  $F = \omega_0^2 B / (\omega_0^2 - \omega^2)$ . Как известно из теории колебаний, тогда условие асинхронного возбуждения автоколебаний выглядит следующим образом:

$$\frac{\alpha F^2}{2} - \frac{3\beta F^4}{8} - \eta > 0. \quad (32)$$

Если амплитуда внешней силы зафиксирована, то неравенство (32) определяет область относительной расстройки,  $\Delta = (\omega_0^2 - \omega^2) / \omega_0^2$  для которой выполняются условия асинхронного возбуждения. Таким образом

$$\frac{3\beta}{2\alpha} B^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{6\beta\eta}{\alpha^2}}\right)^{-1} < \Delta^2 < \frac{3\beta}{2\alpha} B^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{6\beta\eta}{\alpha^2}}\right)^{-1}. \quad (33)$$

Отсюда следует, что асинхронное возбуждение возможно только для  $\eta < \alpha^2 / 6\beta$ , т.е. для достаточно маленькой величины коэффициента  $\eta$ .

Для расстроек, меньших по абсолютной величине чем левая часть неравенства (33), возможны только вынужденные колебания с частотой  $\omega$ ; тогда как для расстроек, больших по абсолютной величине, чем правая часть неравенства (33), зависящая от начальных условий, только вынужденные колебания или биения существуют.

Из неравенства (33) видно, что условие асинхронного возбуждения автоколебаний не зависит от знака расстройки, в то время как для маятника этот эффект имеет место только при низкочастотном внешнем воздействии.

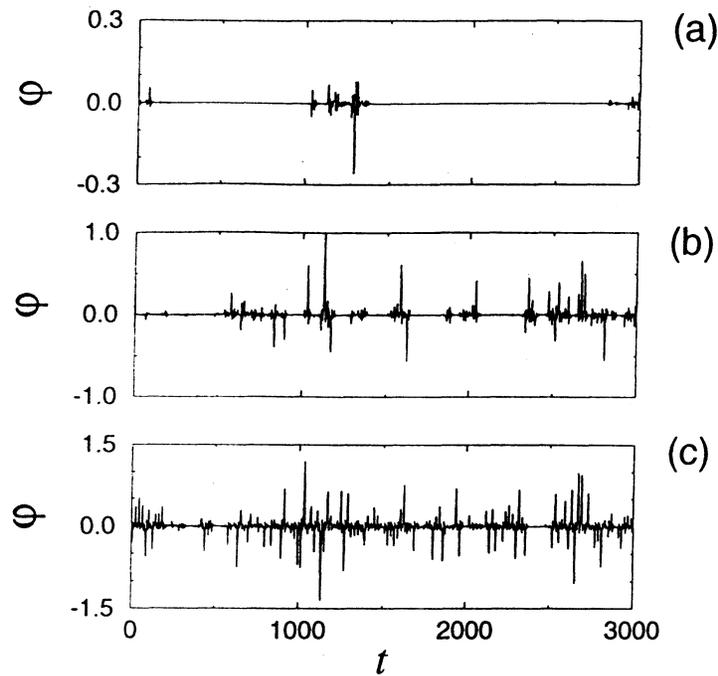


Рис. 29: Зависимость  $\varphi(t)$  для  $\omega_0 = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = 100$ ,  $k = 0$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr} = 0.51$ ,  $\omega_a = 0.3$ , и различных значений амплитуды воздействия: (a)  $a = 1.151$ , (b)  $a = 1.3$ , (c)  $a = 1.5$ .

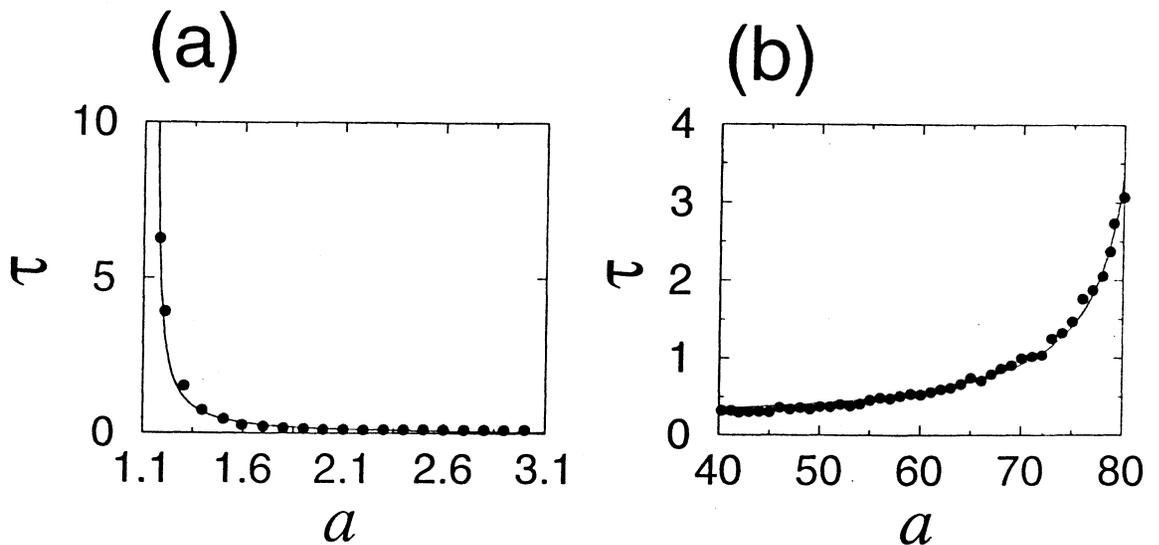


Рис. 30: Зависимость средней длительности "ламинарной" фазы  $\tau$  от амплитуды воздействия  $a$  для возбуждения (a) и подавления (b) колебаний. Значения параметров: (a)  $\epsilon = 0.002$ ,  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 0.51$ ,  $\omega_a = 0.3$  и (b)  $\epsilon = 0.002$ ,  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 5.6$ ,  $\omega_a = 20$ . Сплошные линии показывают зависимости  $\tau = 0.44/(a^2 - a_{cr}^2)$ ,  $a_{cr} = 1.15$  (a) и  $\tau = 1900/(a_{cr}^2 - a^2)$ ,  $a_{cr} = 83.5$  (b), угаданные из формы укороченных уравнений

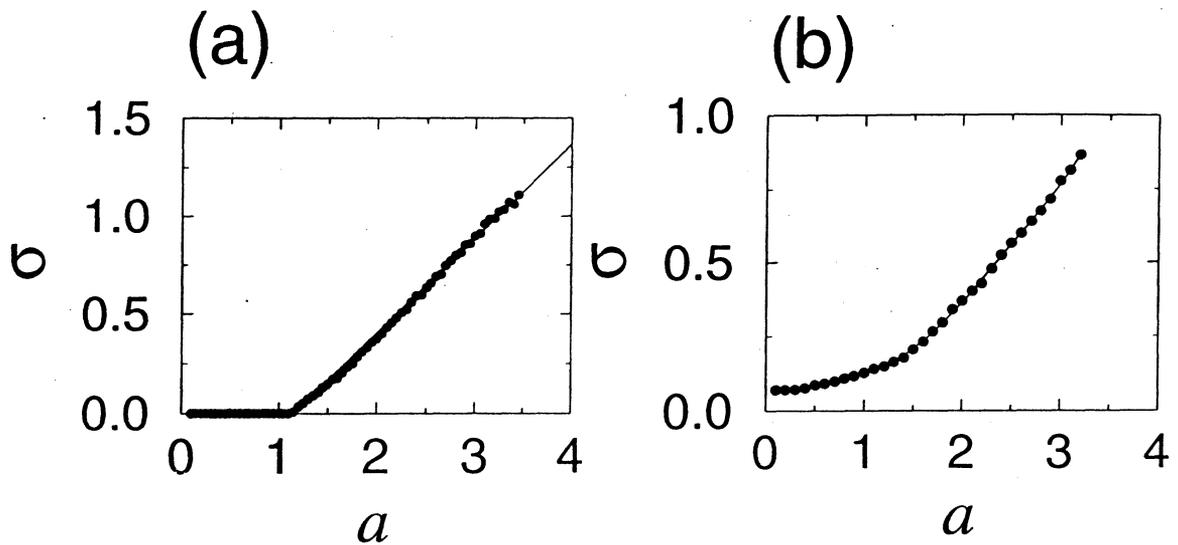


Рис. 31: Зависимости  $\sigma$  от  $a$  для (а)  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 0.51$ ,  $\omega_a = 0.3$  (зависимость  $\sigma = 0.48(a - 1.1)$  показана сплошной линией), (б)  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr}(2) = 1.89$ ,  $\omega_a = 0.3$ .

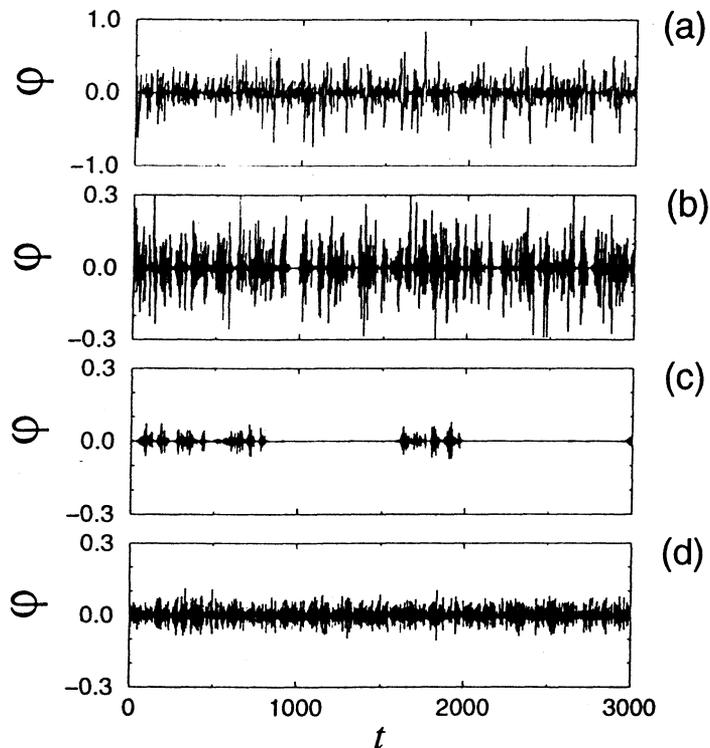


Рис. 32: Подавление колебаний маятника внешним гармоническим воздействием. Зависимости  $\varphi(t)$  для  $\omega_0 = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = \frac{100}{k^2\xi_2^2}$ ,  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 5.6$ ,  $\omega_a = 20$ , (а)  $k = 0$ ,  $a = 10$ , (б)  $k = 0$ ,  $a = 30$ , (с)  $k = 0$ ,  $a = 70$  и (д)  $k^2\xi_2^2 = 0.05\xi_1^2$ ,  $a = 70$ . Видно, что в присутствие аддитивного шума колебания маятника не могут быть полностью подавлены.

### 3.2 Подавление колебаний в маятнике высокочастотным воздействием

Если частота дополнительного гармонического воздействия достаточно высока, то вместо усиления колебаний произойдет их подавление. Результаты численных расчетов уравнения Eq. (29) при  $\omega_a > 2\omega_0$  показаны на рис. 32. Видно, что при маленьких амплитудах внешнего воздействия, практически нет влияния на существующие шумоиндуцированные колебания. Если увеличивать амплитуду внешнего воздействия, то интенсивность шумоиндуцированных колебаний существенно уменьшается, и, в случае отсутствия аддитивного шума, в конце концов при критической амплитуде происходит полное подавление колебаний. К примеру для интенсивности шума  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 5.6$ ,  $\omega_a = 20$  эта амплитуда равна 83.5.

Очевидно, что при присутствии аддитивного шума полное подавление колебаний невозможно, однако оно будет существенным. Этот факт иллюстрируется рисунком 32 *d*.

Интересно заметить, (см. рис. 32), что подавление колебаний, подобно их возбуждению в отсутствие внешней силы и усилению при низкочастотном воздействии, происходит через перемежаемость типа "Включено выключено". По мере увеличения амплитуды воздействия длительность "ламинарной" фазы колебаний так же возрастает. Зависимость длительности "ламинарной" фазы  $\tau$  от амплитуды внешнего воздействия  $a$ , полученная численным расчетом для  $\epsilon = 0.002$ ,  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 6.25$  показана на рисунке 30 *b*. Сплошной линией показана зависимость  $\tau = 1900/(a_{cr}^2 - a^2)$ ,  $a_{cr} = 83.5$  (вид зависимости угадан из формы укороченных уравнений для маятника). Видно, что эта зависимость удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные.

Подавление шумоиндуцированных колебаний зависит как от амплитуды так и от частоты внешнего воздействия. Эти зависимости показаны на рисунке 33.

Рисунок 33 *a* иллюстрирует, что в случае сравнительно высокой частоты воздействия, с увеличением амплитуды воздействия, интенсив-

ность шумоиндуцированных колебаний маятника сначала уменьшается до определенного минимума, а затем возрастает: для достаточно больших амплитуд интенсивность колебаний может быть даже больше, чем в отсутствие воздействия. Нужно заметить, что минимум интенсивности тем ниже, чем выше частота воздействия. При этом возрастает также значение амплитуды, отвечающее минимуму. Для достаточно высокой частоты происходит полное подавление. В случае изменения частоты внешнего воздействия при постоянной амплитуде интенсивность колебаний так же будет иметь минимум, тем ниже и правее в сторону высших частот, чем выше амплитуда (33 б). Таким образом можно заключить, что существуют определенные значения контрольных параметров ( $a$  либо  $\omega$ ), для которых подавление наиболее эффективно.

Подобно возбуждению колебаний маятника дополнительным воздействием явление подавления этих колебаний сильно отличается от известного явления асинхронного подавления автоколебаний [70, 87]. Рассмотрим генератор Ван-дер-Поля с дополнительной внешней силой, описываемый уравнением

$$\ddot{x} - \mu(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 B \cos \omega t. \quad (34)$$

В теории колебаний может быть показано, что если амплитуда внешней силы превышает критическое значение

$$B_{cr} = A_0 \frac{|\omega_0^2 - \omega^2|}{\sqrt{2} \omega_0^2},$$

то автоколебания полностью подавляются и остаются только вынужденные колебания с частотой  $\omega$ . Амплитуда этих колебаний будет тем меньше, чем больше величина расстройки  $\omega^2 - \omega_0^2$ .

Заметим, что подавление автоколебаний в системе под внешним асинхронным воздействием происходит только в случае, если кубическая нелинейность, вызывающая нелинейное положительное трение, играет определяющую роль. Важно, что этот эффект не зависит от знака расстройки, тогда как для шумоиндуцированных колебаний подавление возможно только для достаточно высоких частот внешнего воздействия.

Как было сказано выше, маленькое аддитивное гармоническое воздействие приводит к качественно таким же явлениям, что и мультипликативное. Для сравнения графики  $\varphi(t)$  и спектры в случае мультипликативного и аддитивного воздействия приведены на 38 в обоих случаях низкой и высокой частоты. Аддитивное воздействие оказывает большее воздействие, чем мультипликативное. Так, увеличение  $\sigma$  при низкочастотном воздействии от 0.18 до 0.58 происходит для амплитуды воздействия равной единице в случае аддитивного воздействия и 7.8 в случае мультипликативного воздействия. Подобным образом, уменьшение  $\sigma$  при высокочастотном воздействии от 0.18 до 0.13 происходит для амплитуды воздействия, равной единице при аддитивном воздействии и 8 при мультипликативном.

Интересно, что существенные различия существуют в спектральных плотностях: в случае аддитивного воздействия спектр содержит дискретные линии на частоте воздействия и ее высших гармониках (см. рис. 38 *a* и *c*), тогда как в случае мультипликативного воздействия такие линии отсутствуют (38 *b* и *d*).

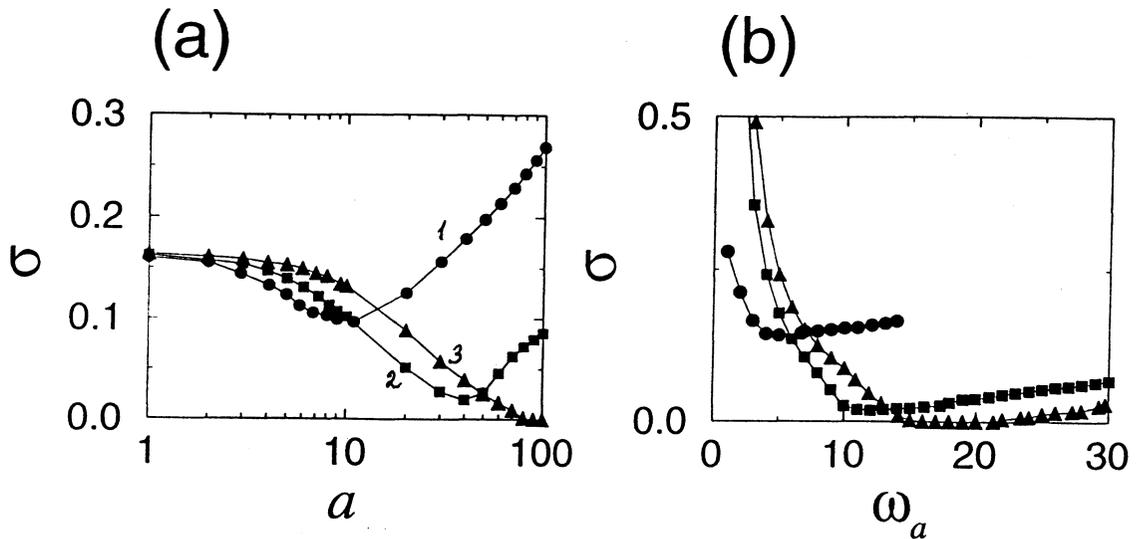


Рис. 33: (a) Зависимости  $\sigma$  от  $a$  для  $\omega_0 = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = 100$ ,  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 5.6$ ,  $\omega_a = 3.5$  (кружки),  $\omega_a = 11$  (квадратики), и  $\omega_a = 20$  (треугольники); (b) зависимости  $\sigma$  от  $\omega_a$  для  $a = 3$  (треугольники),  $a = 40$  (кружки),  $a = 80$  (квадратики).

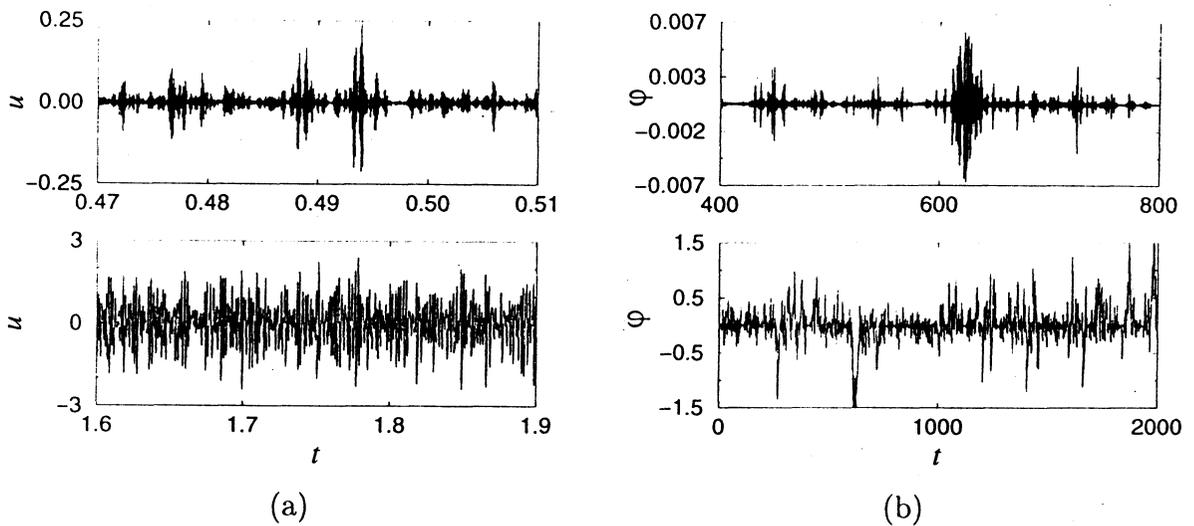


Рис. 39: Перемежаемость типа "Включено-выключено" в сигнале, прошедшем через высокочастотный фильтр, для случая маятника и струи. Нижние графики соответствуют сигналу до фильтра, верхние – сигналу после фильтрования: (a) пульсации скорости в струе, и b) колебания маятника).

### 3.3 Синхронизация колебаний в маятнике внешним воздействием

В классическом смысле синхронизация означает изменение(захват) частоты периодического осциллятора малым воздействием [54, 55, 56]. Этот эффект был хорошо изучен и нашел себе множество применений(см., к примеру [56]). В последнее время, ввиду интенсивного изучения хаотических осцилляторов, понятие синхронизации было обобщено так же на хаотические системы. В этом смысле - синхронизация хаотических систем- синхронизация может пониматься по-разному. Из-за сильного взаимодействия двух или большего числа хаотических систем, их состояние может совпадать, тогда как динамика во времени остается хаотической [59, 44]. Этот эффект может быть назван как полная синхронизация хаотических осцилляторов. Этот случай может быть обобщен на немного неидентичные системы [44] или взаимодействующие подсистемы [62]. Другой подход к определению понятия синхронизации хаотических систем заключается в определении размерности аттрактора всей системы в сравнении с размерностями аттракторов подсистем. Этот подход был развит в работах [72, 73]. Альтернативным подходом к определению синхронизации является сближение пиков в спектральных плотностях соответственных сигналов, по аналогии с совпадением частот синхронизированных периодических систем [74, 53]. В этом случае благодаря взаимодействию ширина пиков в спектрах становится практически одинаковой и пики становятся ближе по частоте. Другой хорошо изученный эффект, это синхронизация, нарушающая хаос, когда периодическая внешняя сила, действующая на хаотическую систему, разрушает хаотическое состояние и порождает периодический режим [75]. Характеристическим свойством указанного эффекта является существование порогового значения связи, зависящее от свойств индивидуальной системы [59, 44, 76, 77]. Одним из последних открытых эффектов является фазовая синхронизация хаотических систем, когда только захват фазы важен для рассмотрения, а на амплитуду не накладывается никаких ограничений и она остается

хаотической [78]. В настоящей работе понятие фазовой синхронизации расширено на шумоиндуцированные колебания. Показано, что в определенном интервале частоты воздействия имеет место синхронизация колебаний маятника в том смысле, что средняя частота шумоиндуцированных колебаний маятника приближенно равна частоте воздействия. Подобный подход был использован в [78, 152, 153], где были численно исследованы эффекты захвата частоты и фазы в хаотических системах. В данном параграфе демонстрируется, эти эффекты так же имеют место в случае шумоиндуцированных колебаний. Полученные результаты опубликованы в [168, 118].

Возможность синхронизации и ее характер может быть исследован аналитически. В случае аддитивного гармонического воздействия без учета аддитивного шума уравнение колебаний маятника будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta(1 + \alpha\dot{\varphi}^2)\dot{\varphi} + \omega_0^2(1 + \xi_1(t))\sin\varphi = \omega^2 B \cos\omega t. \quad (35)$$

Считая  $\varphi \approx A \cos(\omega t + \phi)$  и приближенно решая уравнение (35) методом Крылова-Боголюбова можно получить укороченные уравнения для амплитуды  $A$  и фазы  $\phi$ :

$$\dot{A} = \frac{\omega^2 K_{1\omega}}{4} \left( \eta_\omega - \frac{3\beta\alpha}{K_{1\omega}} A^2 \right) A - \frac{\omega B}{2} \sin\phi + \frac{\omega}{2} A \zeta_1(t), \quad (36)$$

$$\dot{\phi} = \Delta_0 + \omega M_\omega - \frac{1}{16} \omega A^2 - \frac{\omega B}{2A} \cos\phi + \omega \zeta_2(t), \quad (37)$$

где  $\eta_\omega = 1 - 4\beta/\omega^2 K_{1\omega}$ ,

$K_{1\omega} = \kappa(2\omega)/2$ ,  $\zeta_1(t)$  случайный процесс с нулевым средним и интенсивностью  $K_{1\omega}$ ,  $\Delta_0 = (\omega_0^2 - \omega^2)/2\omega$  расстройка частоты,  $M_\omega = \langle \xi \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle$  и  $\zeta_2(t)$ , подобно  $\zeta_1(t)$ , случайный процесс с нулевым средним и интенсивностью  $K_{2\omega} = (\kappa(0) + K_{1\omega})/4$ . Значение  $M_\omega$  может быть вычисленно как в [87, 36].

Если амплитуда воздействия сравнительно мала, то область синхронизации будет узкой. В этом случае фаза колебаний изменяется медленно и можно предположить, что амплитуда колебаний достигает

своего стационарного значения значительно быстрее, чем фаза и это стационарное значение близко значению в отсутствие гармонического воздействия. Тогда уравнение (37) может быть записано в форме

$$\dot{\phi} = \Delta(A_0^2) - \Delta_s(A_0) \cos \phi + \omega \zeta_2(t), \quad (38)$$

где  $\Delta(A_0^2) = \Delta_0 + \omega M_\omega - (1/16)\omega A_0^2$  эффективная расстройка частоты, зависящая от стационарного значения амплитуды  $A_0$  в отсутствие внешнего воздействия, и  $\Delta_s(A_0) = \omega B/2A_0$  эффективная полуширина области синхронизации, которая тоже зависит от  $A_0$ .

Уравнение (38) имеет такую же форму как уравнение, описывающее эволюцию фазы в генераторе Ван-дер-Поля, возбуждаемом внешней гармонической силой в присутствии аддитивного шума [97, 126, 70]. Единственное отличие заключается в том, что  $\Delta$  и  $\Delta_s$  зависит от  $A_0$ . Следовательно, результаты, полученные в [97, 126, 70] должны быть усреднены по амплитуде  $A_0$  с учетом стационарного распределения вероятности, найденного в [87, 118]. В результате может быть найдена область значений расстройки частоты  $\Delta_0(\varepsilon)$ , внутри которой средняя частота колебаний маятника отличается от частоты воздействия меньше, чем на  $\varepsilon$ . Эта область называется здесь областью синхронизации.

Численно средняя частота определяется как  $\Omega = \omega + \langle \dot{\phi} \rangle \equiv \langle \dot{\psi} \rangle$ , где мгновенная фаза  $\psi$  может быть найдена, согласно теории аналитического сигнала, посредством преобразования Гильберта (Подробное описание метода и соответствующие ссылки могут быть найдены в [78, 153]).

На рисунке 34 *a* показана разница средней частоты маятника  $\Omega$  и частоты внешней силы  $\omega$  в зависимости от  $\omega$  для различных значений амплитуды внешней силы  $B$ .

Из этого графика можно увидеть, что если  $B$  достаточно велико, то существует область значений  $\omega$ , внутри которой  $\Omega \approx \omega$ , т.е. можно говорить о захвате частоты. Эти зависимости схожи с зависимостями для синхронизации генератора Ван-дер-Поля в присутствии аддитивного шума [97, 126, 70]. Как уже было замечено, система считается засинхронизованной, если  $|\Omega - \omega| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  определенная маленькая вели-

чина. Учитывая это условие, можно найти области синхронизации на плоскости  $(\omega, B)$  для различных значений интенсивности случайных колебаний оси подвеса маятника. Полученные таким образом области синхронизации показаны на рисунке 35. Видно, что по мере увеличения интенсивности вибраций, область синхронизации сдвигается в область низких частот и увеличивается пороговое значение амплитуды воздействия, необходимое для синхронизации.

Особенно нужно отметить, что внутри области синхронизации колебания маятника остаются иррегулярными, т.е. только частота колебаний захватывается внешней силой, тогда как амплитуда колебаний остается случайной. Этот эффект проиллюстрирован рисунком 36, 37 приведен пример шумоиндуцированных колебаний маятника вместе с внешней силой в режиме синхронизации (36) и в отсутствие внешней силы (37). Сравнивая рисунки (36) и (37), можно увидеть, что внешняя сила усиливает колебания маятника и упорядочивает их.

Заметим, что в отличие от синхронизации хаотических систем [78, 153], захват частоты колебаний маятника происходит только для достаточно больших амплитуд внешнего воздействия (амплитуда внешней силы того же порядка или больше, чем средняя амплитуда колебаний маятника в отсутствие воздействия).

Интересно, что в центре области синхронизации интенсивность колебаний не имеет максимума, а монотонно падает с увеличением частоты внешней силы (см. 34 б). Это свойство отличает синхронизацию шумоиндуцированных колебаний от обычной синхронизации автоколебательных систем.

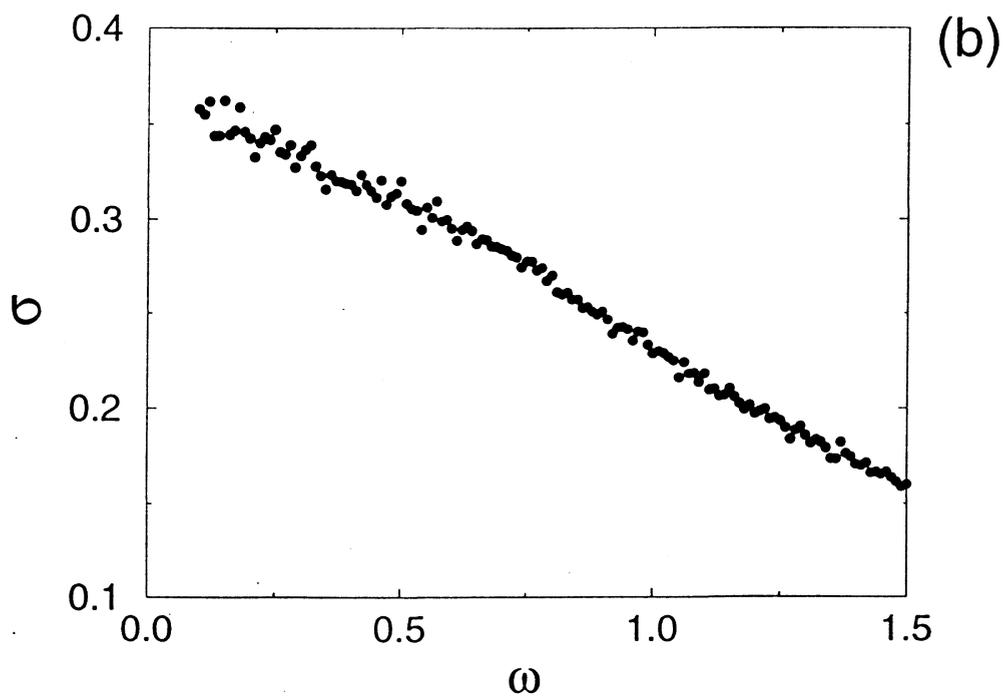
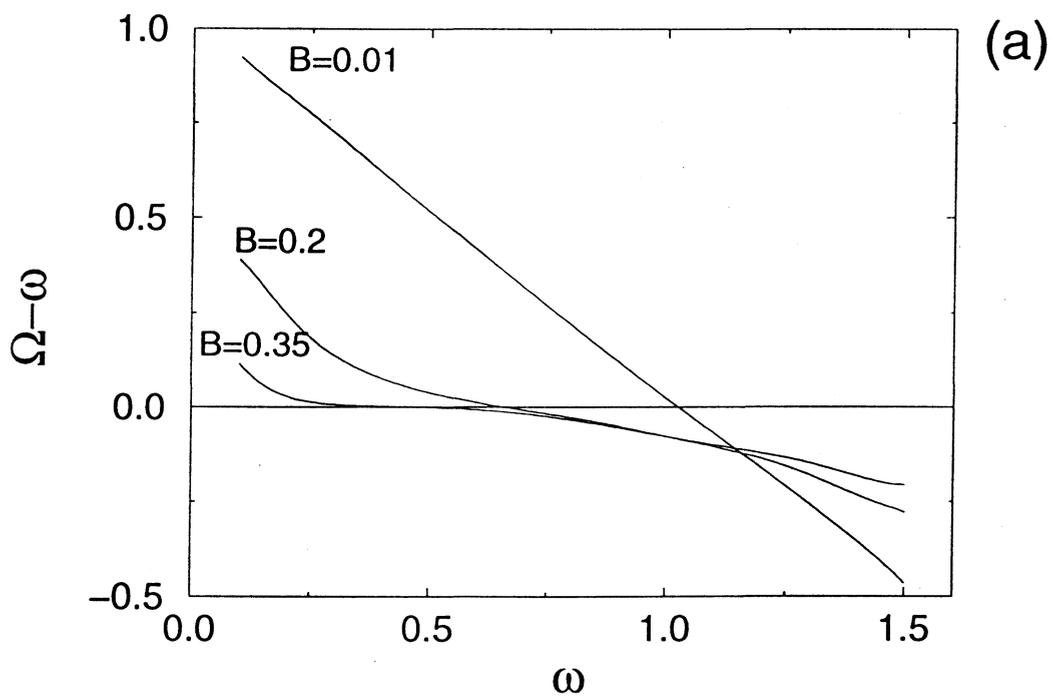


Рис. 34: (a) Зависимость разницы частот  $\Omega - \omega$  от частоты  $\omega$  для различных амплитуд внешней силы  $B$  (значение  $B$  показано рядом с соответствующей кривой) (b) Зависимость  $\sigma$  от  $\omega$ .

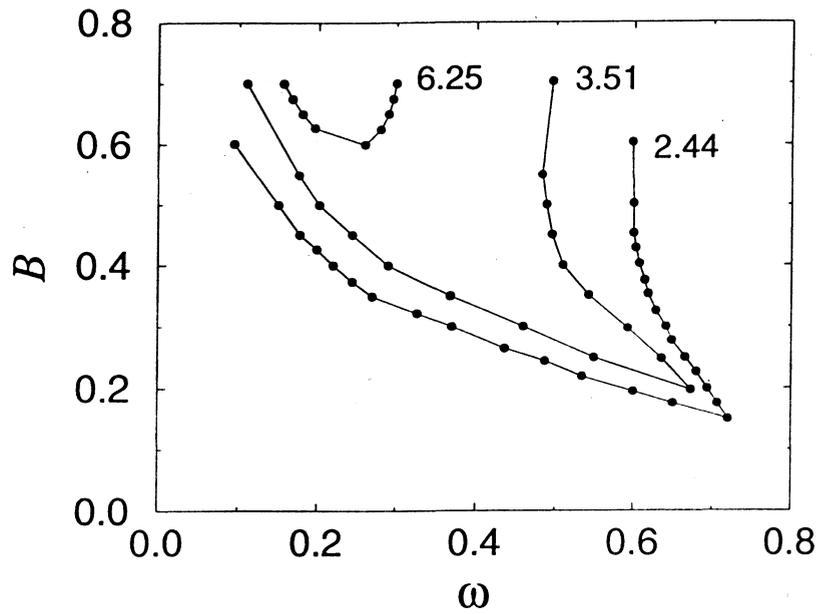


Рис. 35: Области синхронизации для различных величин интенсивности шума (значения  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr}$  показаны на графике),  $\varepsilon = 5 * 10^{-3}$ .

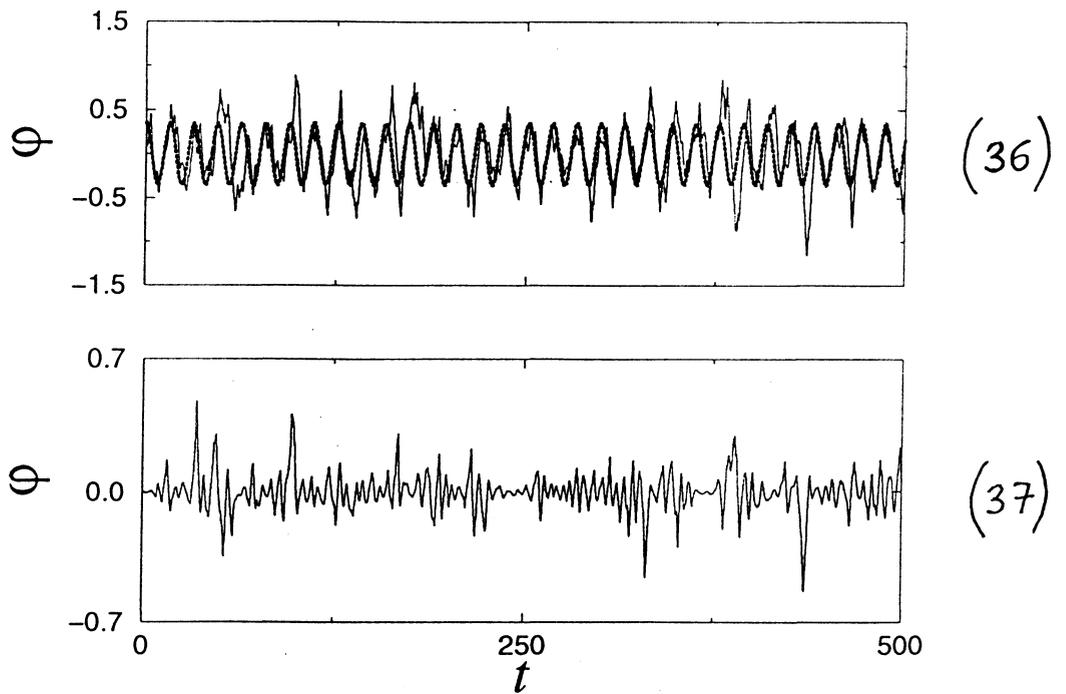


Рис. 36: ~~Временная~~ Временная зависимость  $\varphi$  в центре области синхронизации ( $\omega = 0.4$ ) для  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 2.44$ ,  $B = 0.35$  вместе с внешней силой (37) временная зависимость  $\varphi$  for  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 2.44$  в отсутствие внешней силы.

### 3.4 Аналогия между шумоиндуцированными колебаниями маятника со случайно колеблющейся осью подвеса и турбулентными процессами в струях

Как уже отмечалось, поведение шумоиндуцированных колебаний в маятнике имеет много общего с турбулентными процессами в струях.

Прежде всего отметим аналогию между эволюцией спектров колебаний маятника при увеличении интенсивности шума и эволюцией спектров турбулентных пульсаций скорости в струе при удалении от сопла. (см. рис. 8 и 21 d,e,f). Сравнивая эти рисунки, видно, что они имеют много общего. Как следует из полученных нами результатов, в маятнике максимум спектра смещается в сторону низких частот при увеличении интенсивности шума, обусловленного случайной вибрацией оси подвеса, и становится монотонно спадающим. Этот эффект можно объяснить неизохронностью колебаний маятника, а именно, уменьшением частоты колебаний с ростом амплитуды. Подобное поведение спектра наблюдается в струе с увеличением расстояния от сопла (рис. 8). Как и в маятнике это можно объяснить уменьшением собственной частоты эффективного резонатора (см. Глава 1) при удалении от сопла. Некоторая аналогия в поведении спектров сохраняется при аддитивном дополнительном воздействии на маятник и при акустическом воздействии на струю (см. рис. 11 и 38 а,с). Аналогия проявляется в наличии в спектре дискретных составляющих на частоте воздействия. Вместе с тем имеются и отличия: при удалении от сопла в струе в спектре появляются субгармонические составляющие, что мы не наблюдали в маятнике.

Заметим также, что гистограммы распределения квадрата мгновенной амплитуды колебаний скорости в струе монотонны, что совпадает с поведением гистограмм для шумоиндуцированных колебаний в маятнике (рис. 24). Если считать, что критерии Рытова-Диментберга является надежным способом различения шумоиндуцированных и хаотических колебаний динамической природы, то этот факт является дополнительным аргументом в поддержку нашей гипотезы о происхо-

ждении турбулентности.

Особенно ярко аналогия проявляется в характере управления шумоиндуцированными колебаниями маятника дополнительным гармоническим воздействием и управлением турбулентными пульсациями в струе при помощи акустического воздействия. Как и в струе, в маятнике при низкой частоте дополнительного воздействия колебания усиливаются; тогда как при высокой частоте они ослабляются. В случае, если интенсивность шумового воздействия мало отличается от ее порогового значения, в определенном интервале частот дополнительного воздействия зависимость интенсивности колебаний маятника имеет резонансный характер, подобный показанному на рисунке 6 *a* для струи под акустическим воздействием (см. для сравнения 6 *d* и 6 *a*). Пример усиления колебаний маятника низкочастотным дополнительным воздействием показан на рисунке 31. Видно, что как и для струи, этот эффект имеет пороговый характер.

Теперь рассмотрим в подробностях аналогию между подавлением шумоиндуцированных колебаний маятника и подавлением турбулентности в струе высокочастотным воздействием.

Для наглядности рисунки 7 и 33 показаны еще раз рядом. Сравнивая рисунки 7 *a* и 33 *a*, можно увидеть, что кривая 1 на рисунке 33 *a* и зависимость 33 *a* очень похожи друг на друга. В обоих случаях при увеличении амплитуды воздействия зависимость не монотонна: сначала эффект подавления колебаний усиливается, затем ослабляется, и даже возможно усиление колебаний. Из рисунка 7 *a* видно, что при увеличении частоты воздействия можно добиться более эффективного подавления шумоиндуцированных колебаний маятника, вплоть до их полного поглощения. К сожалению, у нас нет таких данных для струи.

Полностью аналогичными являются и зависимости интенсивностей колебаний маятника и турбулентных пульсаций от частоты воздействия при фиксированных значениях амплитуды воздействия. Для каждого значения амплитуды воздействия существует оптимальная частота, при котором подавление максимально, тем большая, чем больше амплитуда воздействия.

Аналогия проявляется и в поведении шумоиндуцированных колебаний маятника и турбулентных пульсаций скорости в струе после прохождения через высокочастотный фильтр. В работе [119] было отмечено, что при прохождении турбулентного сигнала через такой фильтр в нем появляется перемежаемость. Мы изучили это явление для пульсаций скорости в струе, полученных экспериментально, и для шумоиндуцированных колебаний маятника, рассмотренных выше. В обоих случаях наблюдается перемежаемость типа "Включено-выключено" после высокочастотного фильтрования (см. рис.39 *a* и *b*). Этот факт может быть рассмотрен как еще один аргумент в поддержку рассмотренной аналогии.

Аналогия между управлением шумом идуцированными колебаниями в мятике и турбулентными пульсациями в струе

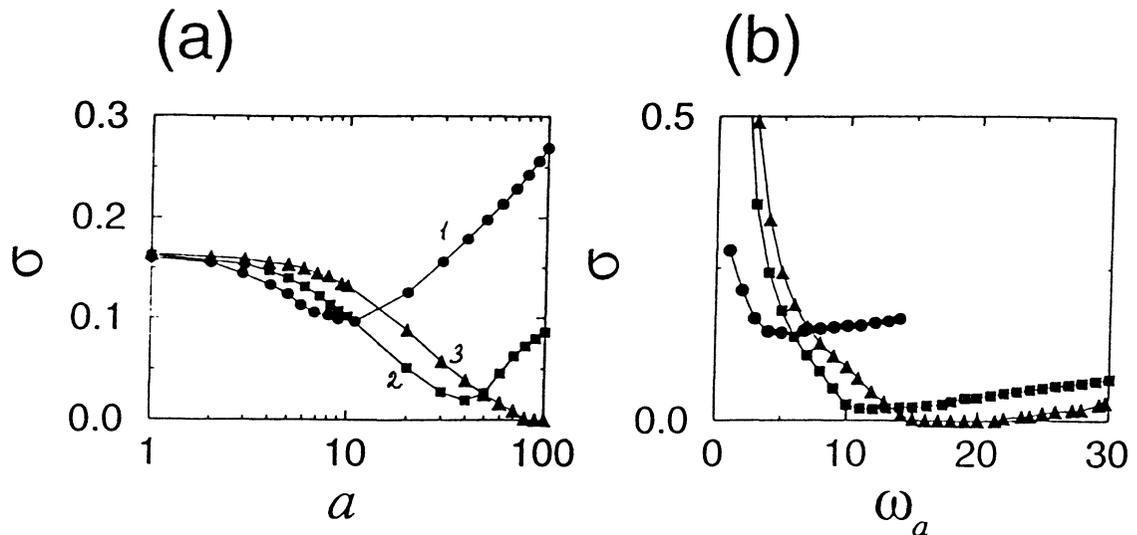


Рис. 33: (а) Зависимости  $\sigma$  от  $a$  для  $\omega_0 = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = 100$ ,  $\kappa(2\omega_0)/\kappa_{cr} = 5.6$ ,  $\omega_a = 3.5$  (кружки),  $\omega_a = 11$  (квадратики), и  $\omega_a = 20$  (треугольники); (б) зависимости  $\sigma$  от  $\omega_a$  для  $a = 3$  (треугольники),  $a = 40$  (кружки),  $a = 80$  (квадратики).

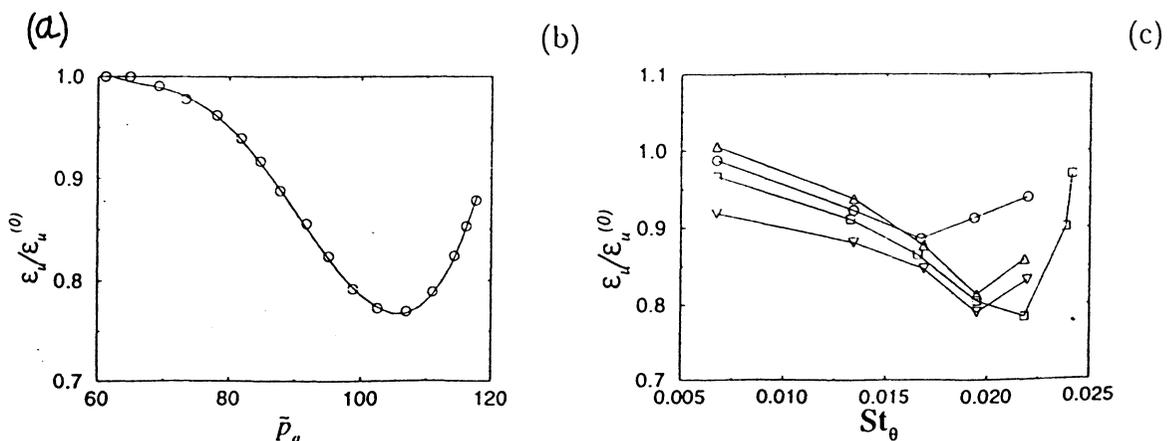


Рис. 7: Подавление турбулентности в струе акустическим воздействием. Экспериментальная зависимость фактора подавления  $\epsilon_u/\epsilon_u^{(0)}$ , где  $\epsilon_u^{(0)}$  это относительная интенсивность продольных пульсаций скорости в отсутствие акустического воздействия, (а) от относительной амплитуды акустического давления  $\bar{p}_a$ , измеряемого в децибелах, для  $St_a = 2.35$ ,  $x/D = 8$ ; (б) от числа Струхала  $St_\theta = St, \theta/D$ , где  $\theta$  толщина слоя смешения, для  $x/\theta = 200$  (показаны зависимости для четырех значений амплитуды колебательной скорости акустической волны: 0.5 (кружки), 2.5 (треугольники вверх), 3.5 (треугольники вниз) and 4.5 (квадратики), в процентах от  $U_0$ ).

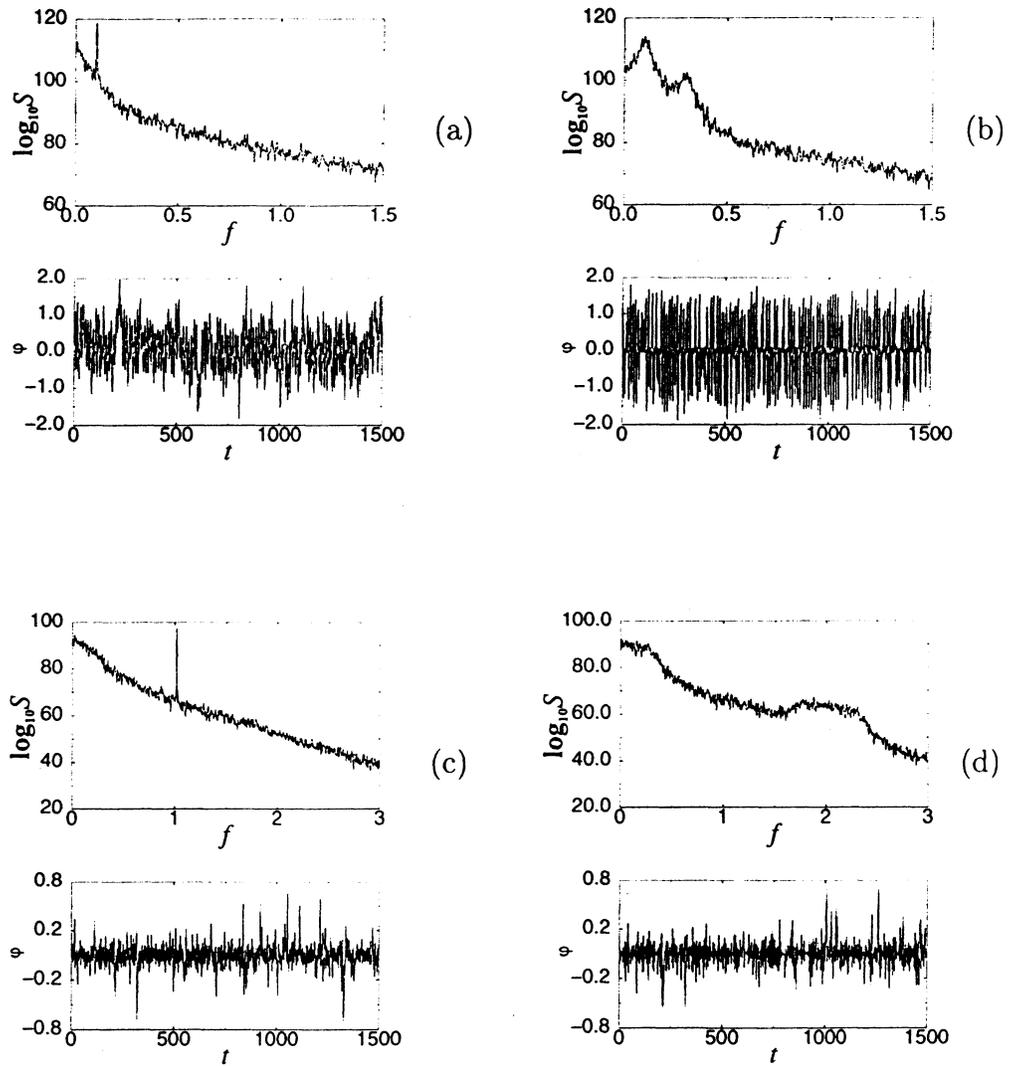


Рис. 38: Зависимости  $\varphi(t)$  и соответствующих спектров мощности в случае аддитивного (a, c) и мультипликативного ((b, d) воздействия  $\omega_0 = 1, \beta = 0.1, \alpha = 100, \kappa(2)/\kappa_{cr} = 6.25$ . (a)  $b = 1, \omega_b = 0.5$ ; (b)  $a = 7.8, \omega_a = 1$ ; (c)  $b = 1, \omega_b = 5$ ; (d)  $a = 8, \omega_a = 10$ .

## Глава 4. Шумоиндуцированные и хаотические колебания в модели детских эпидемий, вызванные сезонными изменениями степени контакта

На рисунке 40, взятом из [160], изображена динамика детских эпидемий для Нью-Йорк Сити с 1928 по 1964 год. Видно, что число заболевших детей меняется скачкообразным и нерегулярным образом. Природа этой нерегулярности является интригующей проблемой в изучении биологических систем [161]. Для объяснения динамики детских заболеваний, таких как ветряная оспа, корь, свинка или краснуха, Дитцом была предложена [159] так называемая стандартная эпидемиологическая, или SEIR модель. Позже модель интенсивно изучалась ([163, 164], к примеру) и было показано, что периодическое изменение степени контакта инфекционных детей с детьми, которые подвержены риску заболеть, может привести так же к хаотическим колебаниям детских инфекций, похожим на флуктуации. Модель включает в себя четыре составных компоненты, каждая из которых определяет количество детей с соответствующей группе: (1) дети, которые могут быть подвержены риску заболеть - все дети после рождения ( $S$ ), (2) зараженные, но еще не переносящие инфекцию дети в период инкубационного периода ( $E$ ), инфекционные дети в период болезни ( $I$ ), и выздоровевшие и иммунно-защищенные дети ( $R$ ). Все дети вместе составляют популяцию, численность которой предполагается постоянной и без ограничения общности может быть положена равной 1:

$$S + E + I + R = 1 \quad (39)$$

Взаимная связь между этими компонентами проиллюстрирована на рис.41, где представлена схема модели. Полностью все предположения, необходимые для построения модели, описаны в [164]. На основе эти предположений модель может быть описана системой четырех дифференциальных уравнений:

$$\dot{S} = m(1-S) - b(t)SI; \quad \dot{E} = b(t)SI - (m+a)E; \quad \dot{I} = aE - (m+g)I; \quad (40)$$

$$\dot{R} = gI - mR, \quad (41)$$

где  $1/m$  среднее время ожидания,  $1/a$  среднее время инкубационного периода,  $1/g$  среднее время инфекционного периода,  $b$  степень контакта (среднее число детей, подверженных риску заболеть, ежегодно контактируемых с инфекционными детьми). Нужно заметить, что уравнения (40) не содержат переменной  $R$ , таким образом эти уравнения могут рассматриваться независимо от уравнения (41).

Можно легко показать, что для постоянной степени контакта  $b = const = b_0$  и для любых значений остальных параметров, уравнения (40) имеют одну аperiodически неустойчивую сингулярную точку с координатами  $S = 1, E = I = 0$  (*extinction of epidemics*) и одну устойчивую сингулярную точку с координатами  $S = 1, E = I = 0$  и одну устойчивую точку (*endemic equilibrium*) с координатами:

$$S_0 = \frac{(m+a)(m+g)}{ab_0}, \quad E_0 = \frac{m}{(m+a)} - \frac{m(m+g)}{ab_0}, \quad I_0 = \frac{am}{(m+a)(m+g)} - \frac{m}{b_0}. \quad (42)$$

В экспериментальных данных четко прослеживается сезонная зависимость всплесков эпидемий. Лондон и Йорке [167] предположили, что такая динамика связана с сезонными изменениями степени контакта. Если степень контакта  $b$  изменяется со временем, то переменные будут колебаться со временем и возбужденные колебания будут происходить вокруг устойчивой сингулярной точки с координатами 42. Обычно сезонные колебания рассматриваются в форме:

$$b(t) = b_0(1 + b_1 f(t)) \quad (43)$$

где  $f(t)$  функция, описывающая форму изменений степени контакта.

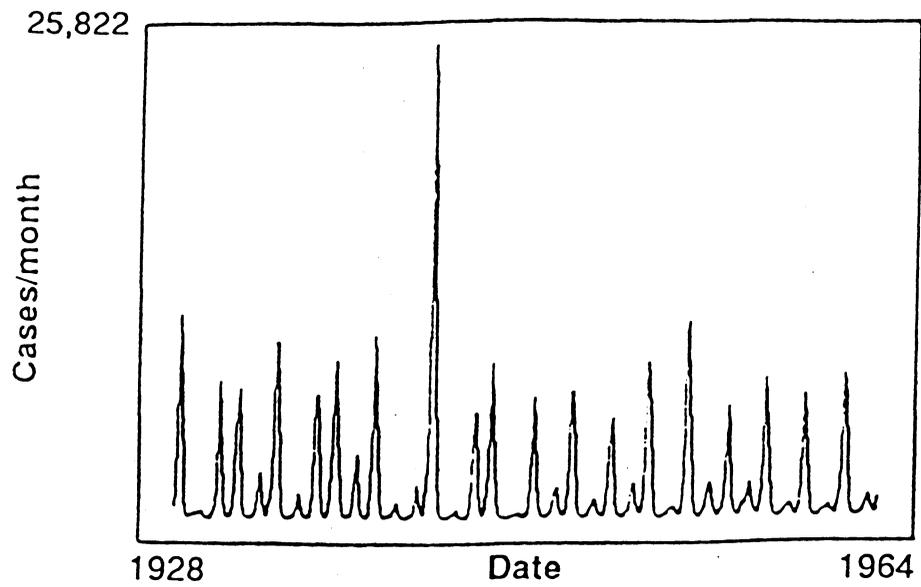


Рис. 40: Динамика эпидемий детской кори для Нью-Йорк Сити за интервал времени с 1928 года по 1964 года.

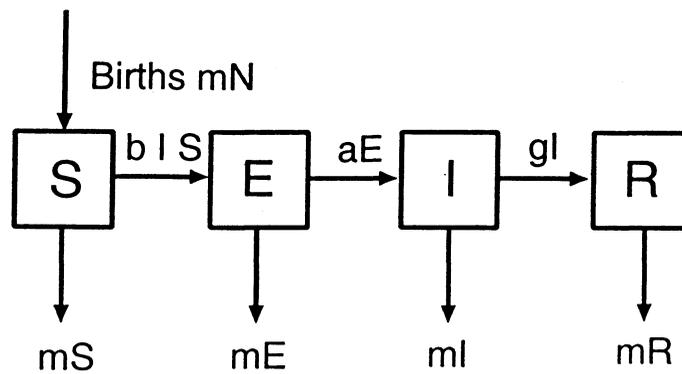


Рис. 41: Схема составной модели Олсена.

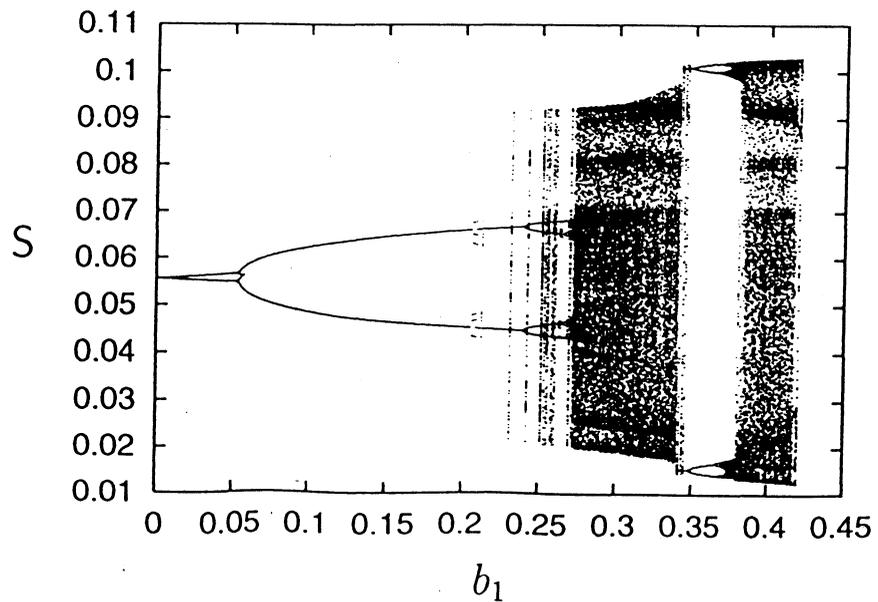


Рис. 42: Бифуркационная диаграмма для периодического изменения степени контакта.

#### 4.1 Периодическое и случайное изменение степени контакта

В [163] было предположено, что благодаря сезонным изменениям окружающих условий, степень контакта  $b$  должна периодически зависеть от времени с периодом, равным одному году:

$$f(t) = \cos(2t), \quad (44)$$

где время измеряется в годах. Было показано, что при периодическом изменении параметра  $b$ , в модели возбуждаются колебания, которые могут быть либо периодическими, либо хаотическими. Переход от периодических колебаний к хаотическим при увеличении параметра  $b_1$  происходит через удвоение периода (см. рис.42. Хаотические колебания наблюдались Олсеном и Шаффером [163] при следующих значениях параметров:  $m = 0.02 \text{ year}^{-1}$ ,  $a = 35.85 \text{ year}^{-1}$ ,  $g = 100 \text{ year}^{-1}$ ,  $b_1 = 0.28$ . Эти параметры соответствуют оценкам для детских болезней в ведущих странах мира. Форма колебаний и проекция траектории в фазовом пространстве, полученные численным решением уравнений (40) показаны на рис.43 *a*. При этом форма решений системы похожа на зависимости, наблюдаемые экспериментально. Таким образом, модель с периодическим изменением степени контакта объясняет динамику реальных эпидемий детских болезней.

На рис.43 можно увидеть, что средняя частота колебаний решения немного меньше половины частоты внешнего воздействия. Это свидетельствует о том, что параметрический механизм играет основную роль в возбуждении колебаний.

С физической точки зрения случайное изменение степени контакта более обоснованно, чем периодическое. В этом случае  $f(t) = \xi(t)$  цветной шум с максимумом в спектре на частоте  $\omega = 2\pi$ . Результаты численного решения уравнений модели для этого случая показаны на рис. 43 *b* для тех же значений параметров, что и для периодического изменения степени контакта. При увеличении параметра  $b_1$  дисперсия  $S - S_0$  будет так же увеличиваться (см. рис. 44*a*).

В определенном интервале значений  $b_1$  зависимость  $\overline{(S - S_0)^2}$  от  $b_1$  может быть аппроксимирована прямой линией. Значение параметра

$b_1$ , при котором эта прямая пересекает абсциссу может рассматриваться как точка фазового перехода второго рода. Для того, чтобы это показать, перепишем уравнения модели 40 для новых переменных  $S' = S - S_0$ ,  $E' = E - E_0$ ,  $I' = I - I_0$ :

$$\begin{aligned}\dot{S}' &= -mS' - b(S'I' + S'I_0 + S_0I') - b_0b_1S_0I_0\xi(t), \\ \dot{E}' &= b(S'I' + S'I_0 + S_0I') - (m + a)E' + b_0b_1S_0I_0\xi(t), \\ \dot{I}' &= aE' - (m + g)I'.\end{aligned}\tag{45}$$

Если в уравнениях 45 искусственно положить равным нулю аддитивный шум, описываемый компонентой  $b_0b_1S_0I_0\xi(t)$ , то зависимость дисперсии  $\overline{(S - S_0)^2}$  меняется недифференцируемым образом (см. рис. 44 б). Если выбрать  $\overline{(S - S_0)^2}$  за параметр порядка системы, то ясно, что происходит шумоиндуцированный фазовый переход второго рода, поскольку параметр  $b_1$  пропорционален корню квадратному из интенсивности шума. Таким образом корень квадратный из интенсивности шума является аналогом температуры при этом фазовом переходе. Аддитивный шум сглаживает фазовый переход, как этого и следовало ожидать. В отсутствие аддитивного шума колебания становятся неустойчивыми, т.е. в определенный момент времени решение стремится к бесконечности. Чтобы избежать эту неустойчивость, в правую часть уравнения для  $E'$  был добавлен член  $-\alpha E'^3$ .

Сравнивая шумоиндуцированные и хаотические колебания, и обращаясь к экспериментальным данным (см. рис. 40) видно, что они выглядят похоже. Таким образом случайное изменение степени контакта так же объясняет нерегулярность, найденную в экспериментальных зависимостях.

(a:)

Model with periodic variation

(b:)

Model with noise

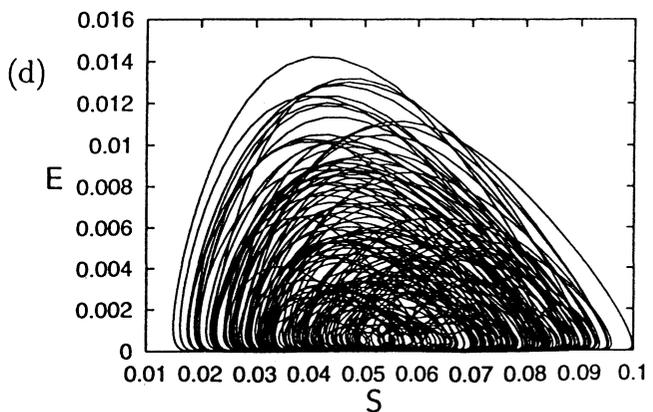
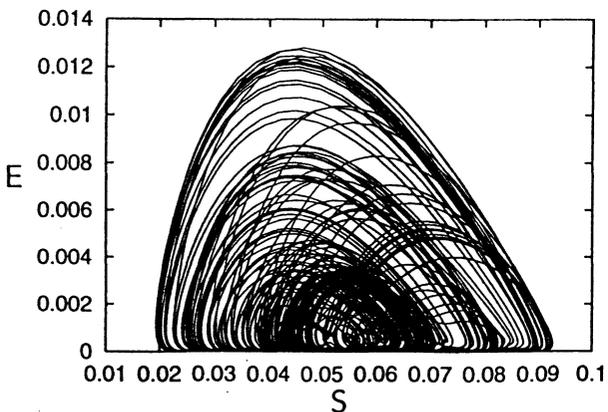
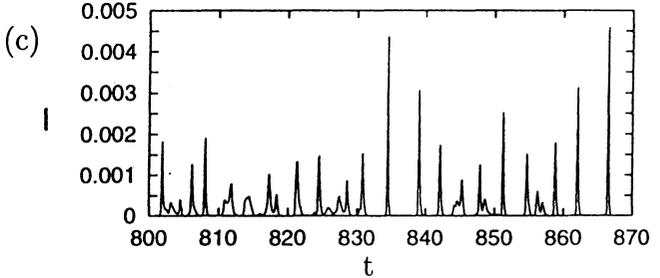
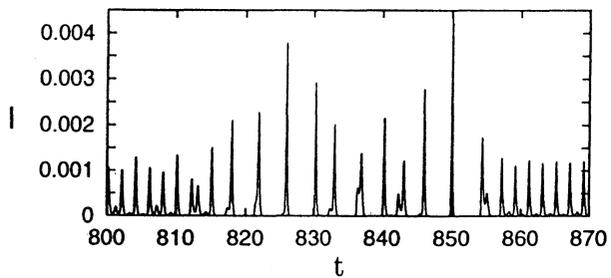
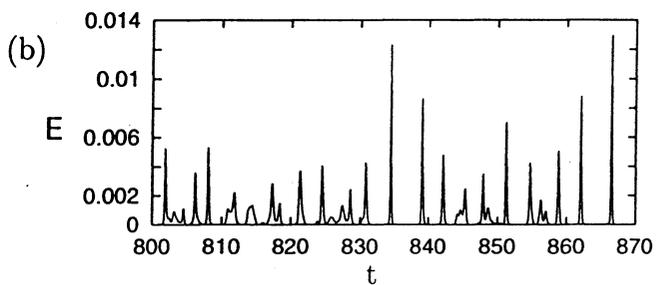
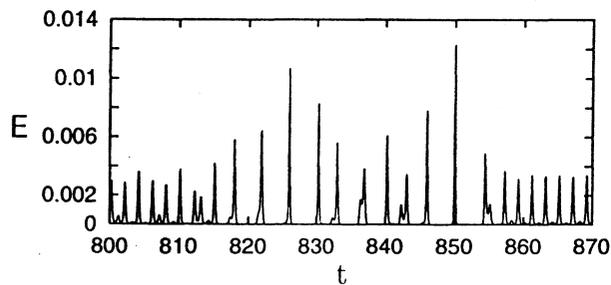
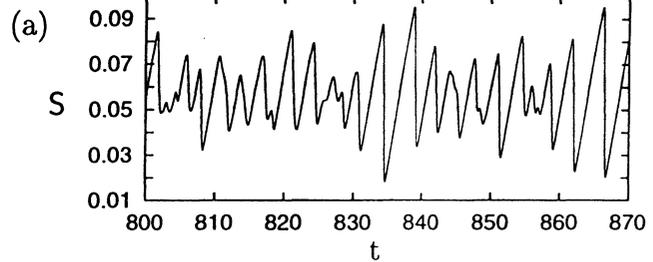
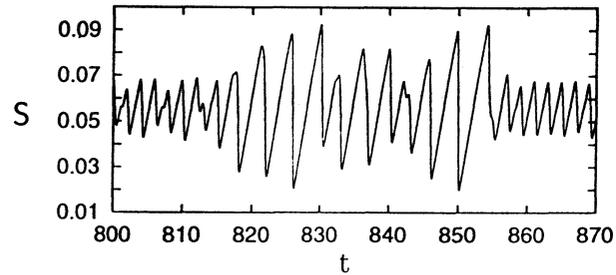


Рис. 43: Решение модели Олсена и траектории в фазовом пространстве  $(E, S)$  для шумоиндуцированных  $(f(t) = \cos(2\pi t))$  и хаотических колебаний  $(f(t) = \xi(t))$ .

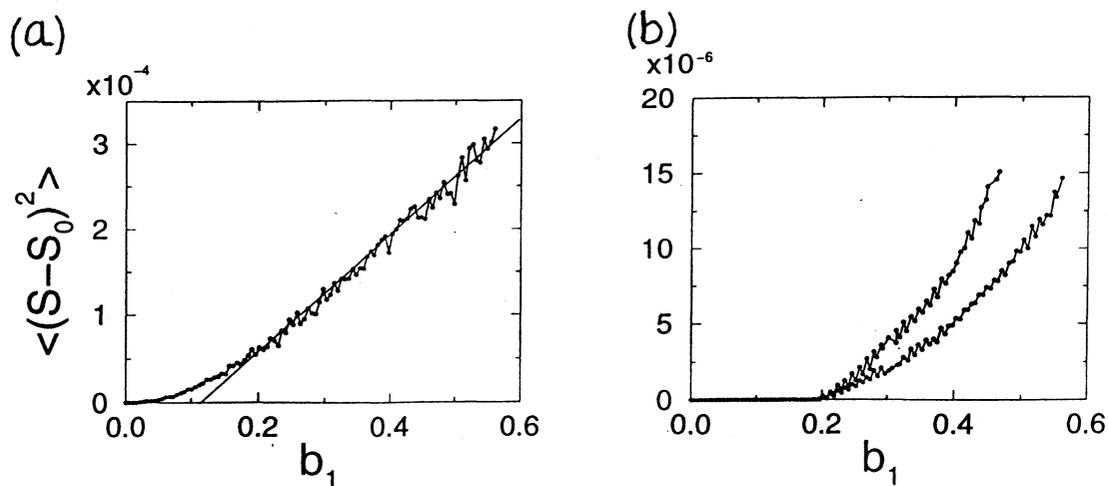


Рис. 44: (а) зависимость дисперсии шумоиндуцированных колебаний от параметра  $b_1$ , (б) та же самая зависимость в случае отсутствия аддитивного шума.

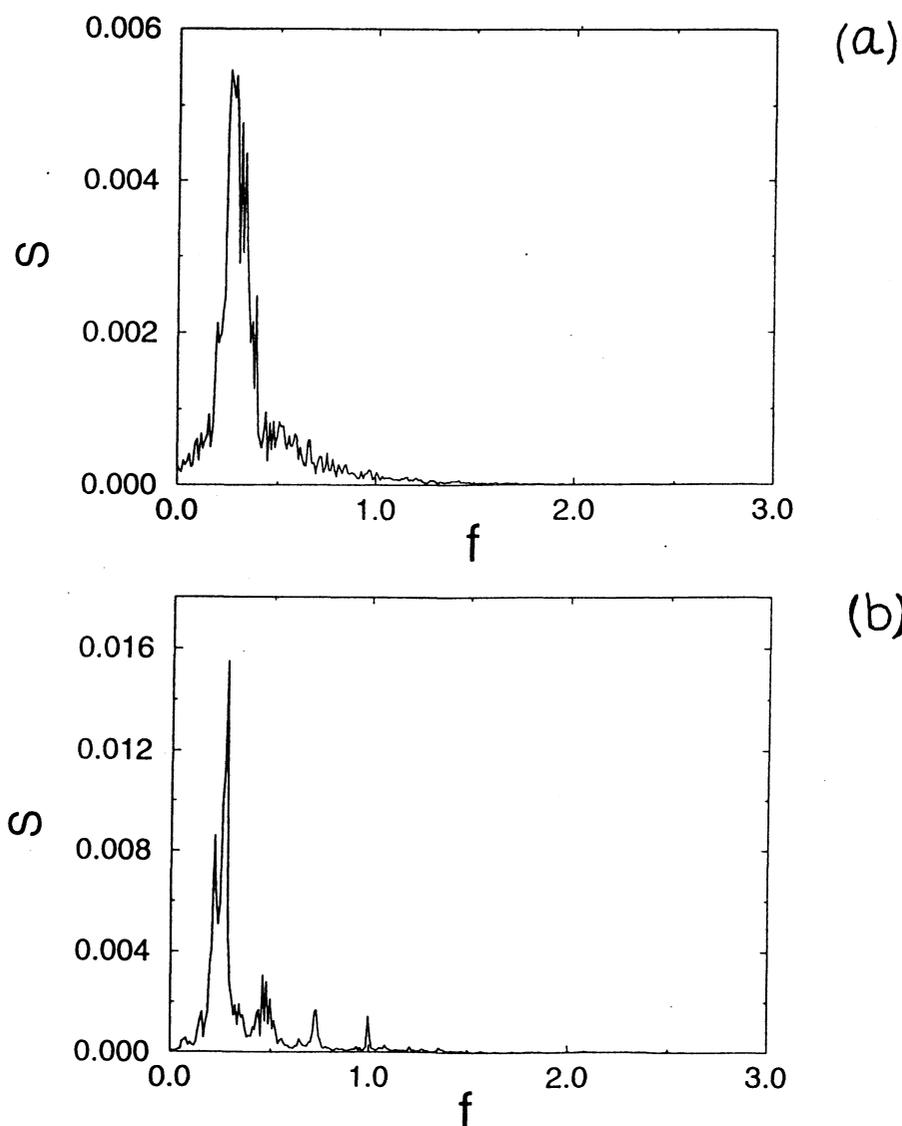


Рис. 45: Спектры шумоиндуцированных (а) и хаотических (б) колебаний.

## 4.2 Различение шумоиндуцированных и хаотических колебаний в SEIR модели

Обратимся теперь к вопросу, чем различаются колебания, вызванные периодическим и случайным изменением степени контакта. Несмотря на то, что шумоиндуцированные и хаотические колебания имеют похожую форму, между ними имеются существенные различия. Прежде всего, различаются спектры рассматриваемых колебаний. В случае гармонического изменения степени контакта спектр мощности содержит дискретную составляющую на частоте воздействия, см. рис. 45 *b*. Так же спектр имеет дополнительные пики на частотах, равным субгармоникам частоты воздействия. Наибольший максимум находится на частоте, близкой к собственной частоте колебаний системы. Автокорреляционная функция хаотических колебаний, не затухающая с увеличением времени корреляции, что связано с присутствием дискретных составляющих в спектре, изображена на рис. 46*a*. Для случайного изменения степени контакта спектр не имеет дискретных составляющих рис. 45 *a*. Максимум спектра расположен на частоте, приблизительно равной  $1/3$ . Автокорреляционная функция шумоиндуцированных колебаний показана на рис. 46*b*.

Второе существенное различие проявляется в корреляционной размерности аттрактора, восстанавливаемого из временной зависимости решения. В случае периодического изменения степени контакта, рассчитанная корреляционная размерность насыщается при увеличении размерности вложения и остается приблизительно равной 2, см. рис. 47 (кривая 1). В случае шумоиндуцированных колебаний рассчитанная фрактальная размерность монотонно увеличивается при увеличении размерности вложения рис. 47 (кривая 2). Последнее свидетельствует о том, что истинная размерность аттрактора бесконечна, или сравнительно велика. Такое отличие от результатов, полученных в Главе 2 для маятника, для которого размерность была найдена конечной, может быть объяснено влиянием присутствующего аддитивного шума.

Третье различие заключается в зависимостях распределения веро-

ятности для процесса  $S(t)$  и квадрата мгновенной амплитуды процесса  $S - S_0$  (см. Глава 2: критерий Рытова-Диментберга). Различные формы этих функций показаны на рисунках 48,49. Видно, что для шумоиндуцированных колебаний указанные функции монотонны, тогда как для хаотических они имеют максимумы. Для расчета мгновенной амплитуды, как и для маятника, было применено численный алгоритм преобразования Гильберта (см. [78]). Можно заключить, что и в данном случае критерий Рытова-Диментберга применим.

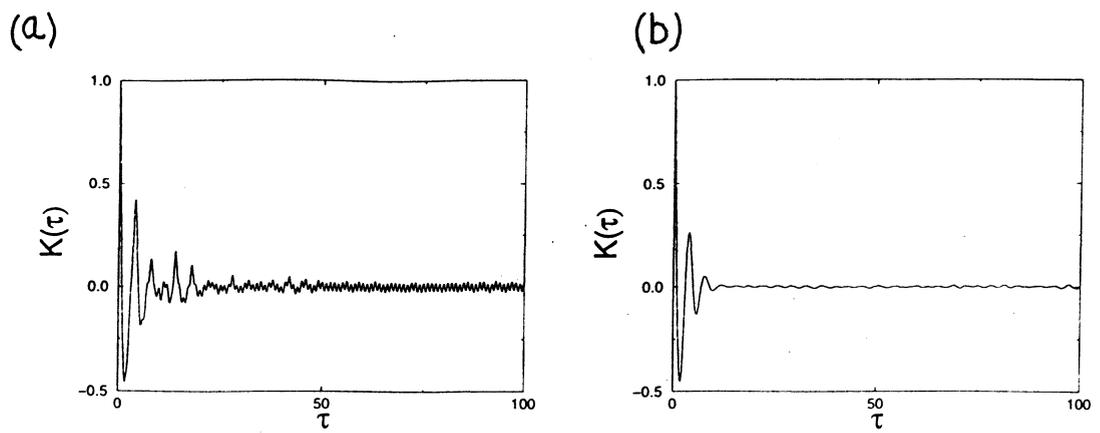


Рис. 46: Корреляционные функции. (а) - хаотические колебания, (б)- шумоиндуцированные колебания.

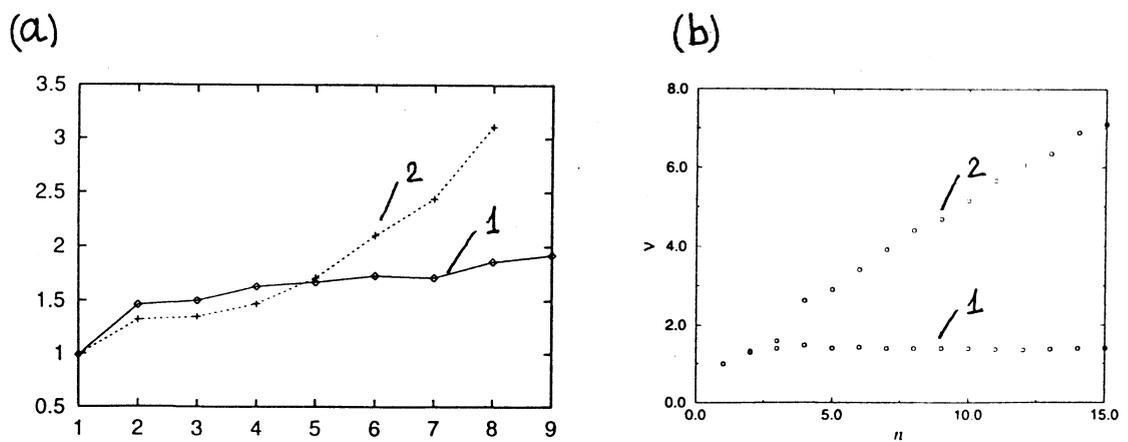


Рис. 47: Зависимость корреляционной размерности от размерности вложения. (а) расчет с помощью "box-counting" алгоритма, (б) расчет с помощью корреляционного интеграла. Кривая 1 соответствует хаотическим, 2 шумоиндуцированным колебаниям.

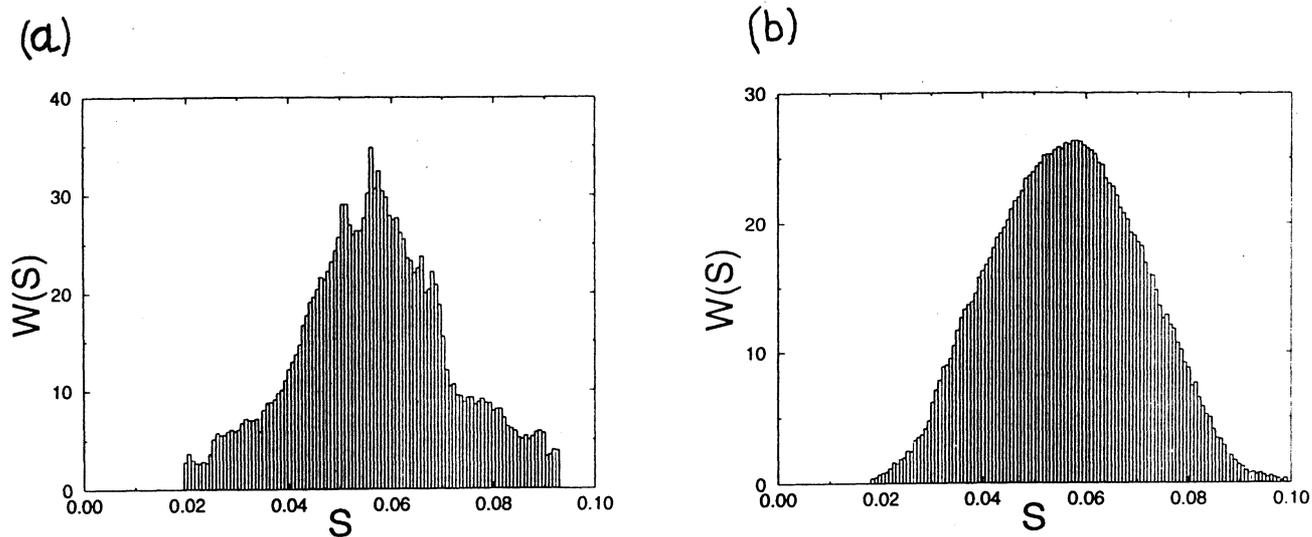


Рис. 48: Плотность вероятности процесса  $S - S_0$  для хаотических и случайных колебаний. (a) хаотические, (b) шумоиндуцированные колебания.

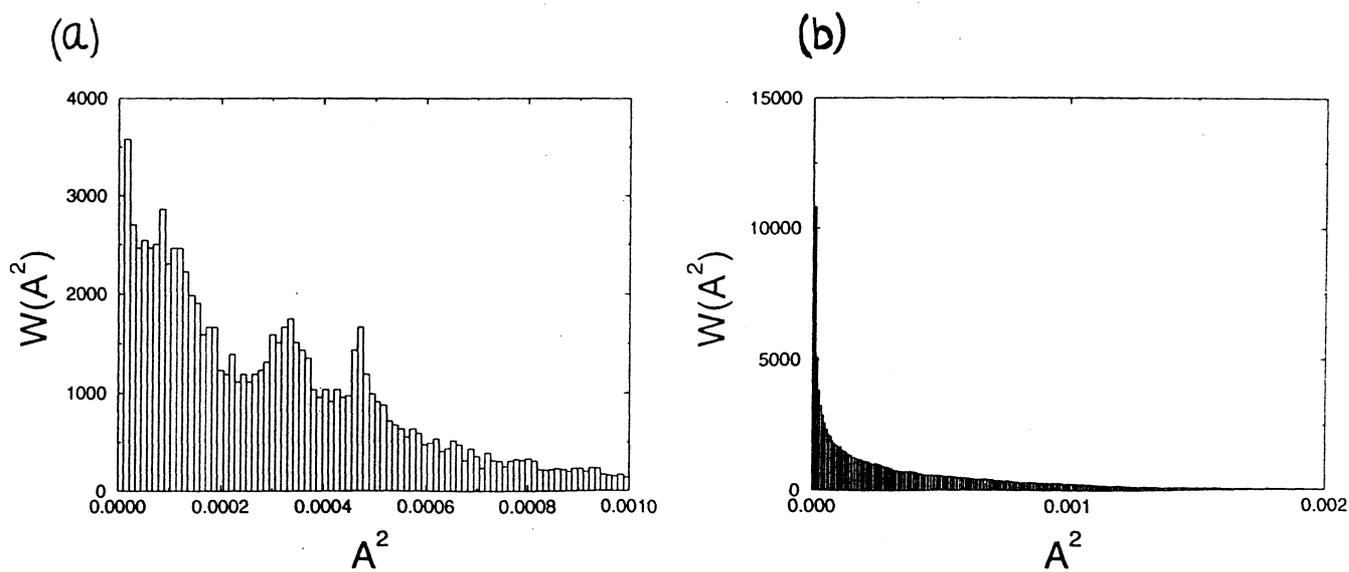


Рис. 49: Плотность вероятности квадрата мгновенной амплитуды для хаотических и случайных колебаний. (a) хаотические, (b) шумоиндуцированные колебания.

### 4.3 Синхронизация шумоиндуцированных колебаний в SEIR модели

Еще одна проблема, заслуживающая изучения, это взаимодействие соседствующих субпопуляций [165, 166], в частности синхронизация. Для начала рассмотрим простейший случай синхронизации с внешним воздействием. Для этого добавим внешнее воздействие в уравнение для  $S$ , который может моделировать, к примеру, влияние экономических циклов на число детей, подверженных риску заболеть:

$$\dot{S} = m(1 - S) - bSI + \varepsilon \cos(\Omega t), \quad (46)$$

$$\dot{E} = bSI - (m + a)E, \quad (47)$$

$$\dot{I} = aE - (m + g)I, \quad (48)$$

$$\dot{R} = gI - mR, \quad (49)$$

где  $\varepsilon$  и  $\Omega$  это амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия соответственно.

Численное решение данных уравнений показало, что в определенном интервале частот внешнего гармонического воздействия имеет место синхронизация в том смысле, что средняя частота решения становится приблизительно равной частоте внешнего воздействия - наблюдается фазовая синхронизация. Таким образом, рассмотренная модель демонстрирует еще один пример синхронизации шумоиндуцированных колебаний. Подобная интерпретация проблемы синхронизации и техника расчета были предложены в [78, 79] и использованы в [168].

На рисунке 50 показана зависимость разницы между средней частотой решения  $\omega$  и частотой внешней силы  $\Omega$  от частоты внешней силы  $\Omega$  для различных значений амплитуды  $\varepsilon$ . Видно, что если  $\varepsilon$  достаточно велика, то существует интервал значений  $\Omega$ , в котором  $\omega \approx \Omega$ , т.е. можно говорить о захвате частоты. Как и в предыдущей главе, система считалась засинхронизованной, если  $|\Omega - \omega| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  это достаточно маленькая величина.

Интересно заметить, что данная фазовая синхронизация может быть рассмотрена как возможность управления средней частотой шумоин-

дуцированных колебаний с помощью внешнего гармонического воздействия.

Другой тип синхронизации, который был найден при изучении данной модели, это взаимная синхронизация между двумя популяциями, взаимодействующими, к примеру, через группы детей, приезжающих в области, где возможен контакт с другой популяцией. Для этого рассмотрим уравнения, описывающие динамику двух взаимодействующих популяций:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= m(1 - S_1) - b_1 S_1 I_1 + \varepsilon(S_2 - S_1), & (50) \\
 \dot{E}_1 &= b_1 S_1 I_1 - (m + a)E_1, \\
 \dot{I}_1 &= aE_1 - (m + g)I_1, \\
 \dot{S}_2 &= m(1 - S_2) - b_2 S_2 I_2 + \varepsilon(S_1 - S_2), \\
 \dot{E}_2 &= b_2 S_2 I_2 - (m + a)E_2, \\
 \dot{I}_2 &= aE_2 - (m + g)I_2, \\
 b_{1,2} &= b_0(1 + b_1 \xi_{1,2}(t)),
 \end{aligned}$$

где индексы 1, 2 соответствуют двум различным популяциям и компонента  $\varepsilon(S_{2,1} - S_{1,2})$  представляет связь между ними с амплитудой связи, равной  $\varepsilon$ . Для качественной характеристики синхронизации двух субпопуляций можно рассмотреть зависимость величины  $\Sigma = \frac{\langle (S_1 - S_2)^2 \rangle}{\sqrt{D_{S_1} D_{S_2}}}$  от амплитуды связи  $\varepsilon$ . Эта зависимость показана на рисунке 51. Видно, что увеличение амплитуды связи приводит к уменьшению величины  $\Sigma$ , а значит и к почти полной синхронизации двух субпопуляций. Синхронизация может быть так же проиллюстрирована рисунком 52, на котором показана проекция решения уравнений 50 на плоскость  $S_1, S_2$  для различных значений величины  $\varepsilon$ . С увеличением  $\varepsilon$  проекция аттрактора превращается в прямую линию - простейшую фигуру Лиссажу, что соответствует почти полной синхронизации между двумя субпопуляциями. Заметим, что несмотря на синхронизацию, решение системы остается случайным.

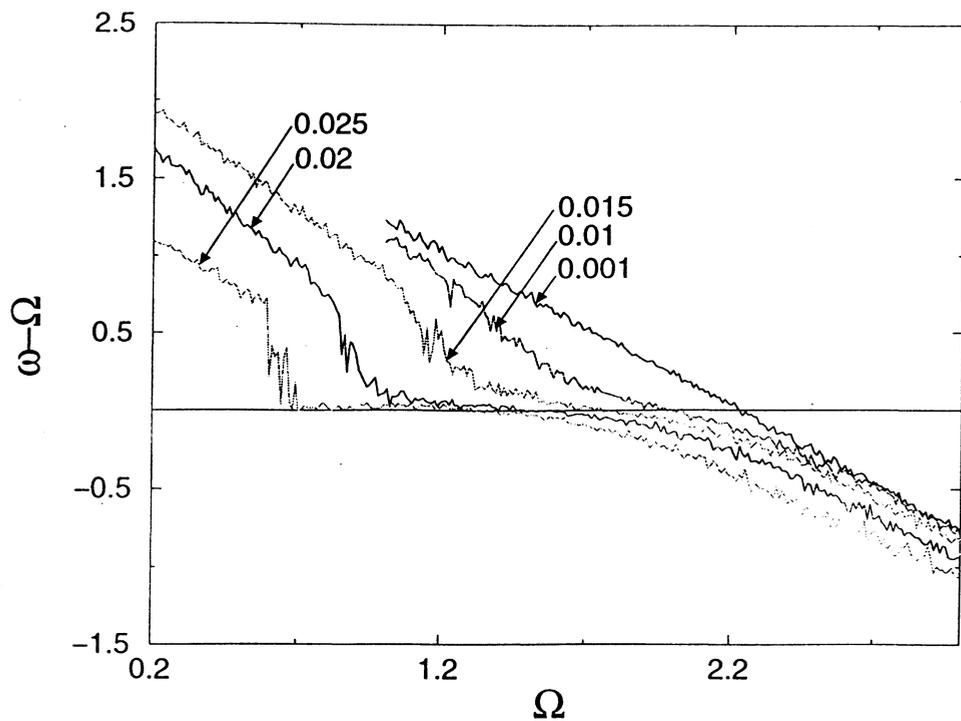


Рис. 50: Синхронизация шумоиндуцированных колебаний с внешним воздействием. Зависимость разницы частот решения и внешней силы от частоты внешней силы.

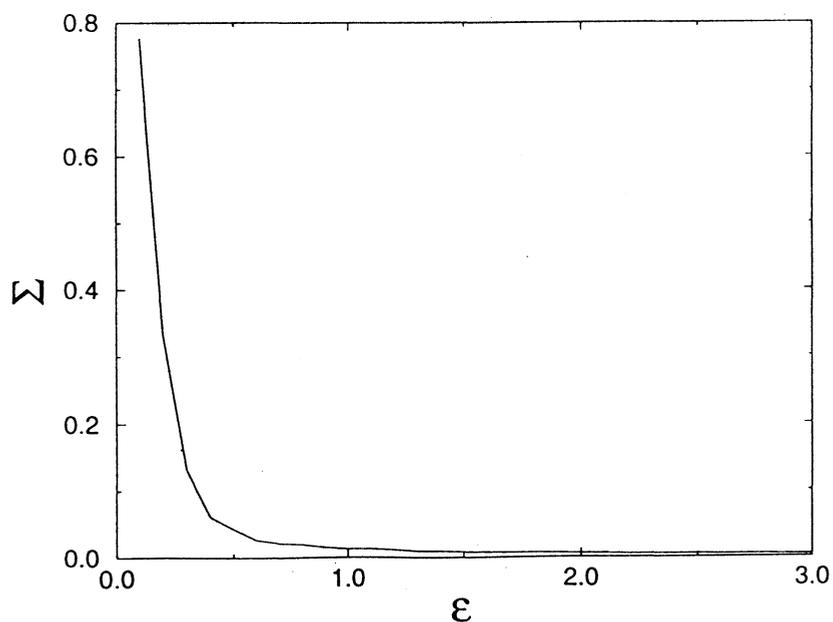


Рис. 51: Синхронизация шумоиндуцированных колебаний двух subsystem. Количественная мера синхронизации.

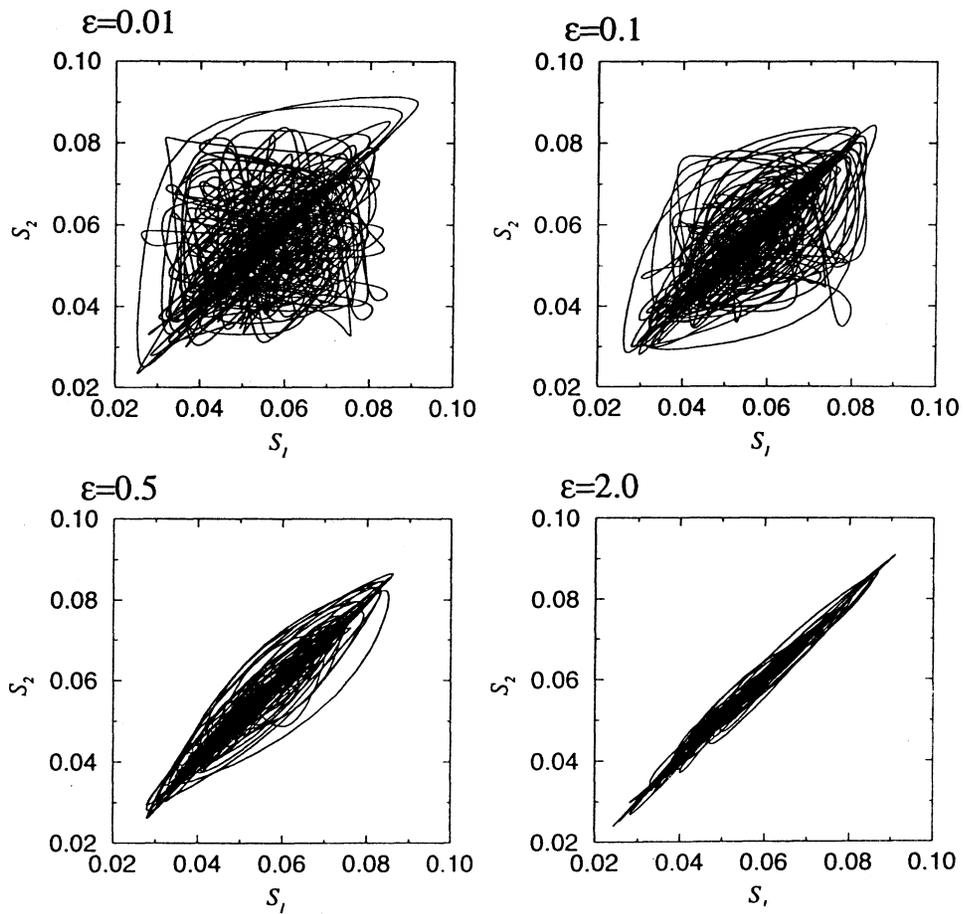


Рис. 52: Синхронизация шумоиндуцированных колебаний двух subsystem. Иллюстрация синхронизации в фазовой плоскости  $S_1, S_2$ .

## Основные результаты и выводы

1. Детально исследованы шумоиндуцированные фазовые переходы в маятнике со случайно колеблющейся осью подвеса (случай мультипликативного шума). Таки образом, шумоиндуцированные фазовые переходы, приводящие к упорядочиванию системы и образованию в ней некоторой структуры, возможны даже в такой простой физической системе, как маятник со случайно колеблющейся осью подвеса.

2. Показана возможность эффективного управления шумоиндуцированным фазовым переходом в маятнике путем дополнительного гармонического воздействия: низкочастотное воздействие облегчает указанный фазовый переход, тогда как высокочастотное – затрудняет его. Имеется так же возможность управления шумоиндуцированными колебаниями: их амплитудой при нерезонансном воздействии и частотой при резонансном.

3. В одних и тех же системах возможны различные механизмы возбуждения, которые приводят к шумоиндуцированным или хаотическим колебаниям. При этом шумоиндуцированные колебания обладают свойствами динамических процессов, такие как конечная корреляционная размерность аттрактора в фазовом пространстве или синхронизация. Это может свидетельствовать о рождении шумоиндуцированного аттрактора. Тот факт, что шум способствует рождению в случайной системе упорядоченной структуры, является чрезвычайно интересным и требует дальнейшего исследования.

4. Показана возможность использования критерия Рытова–Диментберга для различения шумоиндуцированных колебаний и близких к ним хаотических колебаний динамического происхождения.

5. Показана возможность синхронизации шумоиндуцированных колебаний внешним гармоническим воздействием в смысле захвата частоты. Показана так же возможность синхронизации двух взаимодействующих систем.

6. Обнаружена и исследована аналогия между турбулентными пульсациями в струях и шумоиндуцированными колебаниями маятника со

случайно колеблющейся осью подвеса. Эта аналогия проявляется и в управлении этими процессами дополнительным периодическим воздействием. В частности:

- В обоих случаях наблюдается фазовый переход, приводящий к качественно новому состоянию системы. При этом флуктуации в системе играют решающую роль.
- В обоих случаях схожа эволюция формы колебаний и их спектров по мере усиления интенсивности колебаний.
- В обоих случаях наблюдается интенсификация колебаний низкочастотным воздействием и подавление высокочастотным.
- Амлитудно-частотные характеристики при воздействии внешней силы схожи.
- В обоих случаях наблюдается перемежаемость типа "Включено-выключено" при малой интенсивности колебаний и после высокочастотного фильтрования, в случае если интенсивность значительно выше пороговой.

Проведенная аналогия, несмотря на кажущуюся несхожесть систем, позволяет дать некоторые практические рекомендации по управлению турбулентностью, в частности необходимость применения более высокой частоты акустического воздействия для достижения полного подавления турбулентности. Установленная аналогия представляется убедительным аргументом в пользу рассмотрения гипотезы о возникновении турбулентности в незамкнутых потоках как результата шумоиндуцированного фазового перехода.

7. Исследована модель, описывающая динамику детских эпидемий в случае случайного изменения степени контакта. Показано, что возникающие при этом колебания внешне очень похожи на соответствующие хаотические колебания, вызванные периодическим изменением степени контакта. Однако их можно различить, используя критерий

Рытова–Диментберга. Исследована синхронизация колебаний переменных модели как внешним периодическим воздействием, так и при взаимодействии с другой подобной системой.

В будущем планируется изучить шумоиндуцированный фазовый переход в модели, более близкой к модели турбулентной струи. В частности будет рассмотрена система (решетка) взаимодействующих осцилляторов. Введение пространственного распределения приблизит эту модель к реальной струе.

## Благодарности

Я выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю П.С. Ланда за помощь на протяжении всей моей работы.

Я глубоко признателен О.В. Руденко за ценные замечания и многочисленные полезные дискуссии.

Мне приятно поблагодарить J. Kurths за руководство моей работой во время моего пребывания в университете г. Потсдам и L. Schimansky-Geier за помощь в работе по стохастическим процессам.

Я благодарю М. Розенблюма, М.Закса и А.Пиковского за плодотворные дискуссии в области нелинейной динамики.

Так же я хочу поблагодарить Т.Макаренко и Ю.Власова за предоставление экспериментальных данных и объяснения по технике эксперимента, и А.Поталова за советы по расчету фрактальных размерностей.

## Литература

- [1] *W.Horsthemke and R.Lefever. Noise-induced Transitions.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [2] *Drazin P.D., Reid W.H. Hydrodynamic Stability.* Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1981.
- [3] *Strouhal V. Über eine besondere Art der Tonerregung , Ann. Phys.,* 1878, v. 5, No 10, pp. 216–251.
- [4] *Stuart J.T. On the nonlinear mechanics of hydrodynamic stability, J. Fluid Mech.,* 1958, v. 4, No 1, pp. 1–21.
- [5] *Stuart J.T. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, P.1 , J. Fluid Mech.,* 1960, v. 9, No 3, pp. 353–370.
- [6] *Stuart J.T. Hydrodynamic stability, Appl. Mech. Rev.,* 1965, v. 18, No 7, pp. 523–531.
- [7] *Stuart J.T. Nonlinear stability theory, Ann. Rev. Fluid Mech.,* 1971, v. 3, pp. 347–370.
- [8] *Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence , Comm. Math. Phys.,* 1971, v. 20, No 2, pp. 167–192.
- [9] *Ruelle D. Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence . Lect. Notes in Phys., Statistical Models and Turbulence,* 1975, v. 12, p. 292.
- [10] *Kozlov V.V., Rabinovich M.I., Ramasanov M.P., Reiman A.M., Sushchik M.M. Correlation dimension of the flow and spatial development of dynamical chaos in boundary layer , Phys. Lett.,* 1988, v. 128, p. 479.
- [11] *Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности, ДАН СССР,* 1944, т. 44, N 8, сс. 339–342.

- [12] *Теодорчик К.Ф.* Автоколебательные системы. Москва: Гостехиздат, 1952.
- [13] *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. Москва: Сов. Радио, 1977.
- [14] *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М.* Динамическая модель пространственного развития турбулентности, Письма в ЖЭТФ, 1984, т. 39, в. 12, сс. 561–564.
- [15] *Осипов Г.В.* О развитии турбулентности по Ландау в дискретной модели потоковых систем, Изв. вузов, Радиофизика, 1988, т. 31, N 5, сс. 624–632.
- [16] *Артамонов К.И.* Термогидроакустическая устойчивость. Москва: Машиностроение, 1982.
- [17] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика (Теория турбулентности), т.1. Санкт-Петербург, Гидрометеиздат, 1992.
- [18] *Гиневский А.С., Ланда П.С.* Возбуждение гидродинамических и акустических волн в дозвуковых струйных и отрывных течениях, Прикладная Нелинейная Динамика, 1995, т. 3, N 2, сс. 42–59.
- [19] *Rossler O.E.* Chaos and strange attractors in chemical kinetics. In A.Pacaut and C.Vidal, editors, *Synergetics Far from Equilibrium*, volume 3 of *Springer Series in Synergetics*, page 107. Springer, Berlin, Heidelberg, N.Y., 1979.
- [20] *Pomeau Y. and Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Comm. Math. Phys.*, 74(189), 1980.
- [21] *Feigenbaum M.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J.Stat.Phys.*, 19(25), 1978.
- [22] *Feigenbaum M.* The universal metric properties of nonlinear transformations. *J.Stat.Phys.*, 21(669), 1979.
- [23] *Fedchenia I.I.* *Physika A*, 125A(577), 1984.

- [24] *Feigenbaum M.* The transition to aperiodic behavior to turbulent systems. *Comm.Math.Phys.*, 77(65), 1980.
- [25] *Collet.P., Eckmann J.P., and Lanford O.* Universal properties of maps on an interval. *Comm.Math.Phys.*, 76(211), 1980.
- [26] *Salwen H., Grosch C.E.* The stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross-section, *J. Fluid Mech.*, 1971, v. 54, No 1, pp. 93–112.
- [27] *Huerre P., Monkewitz A.* Absolute and convective instabilities in free shear layers, *J. Fluid Mech.*, 1985, v. 159, pp. 151–168.
- [28] *Collet P., Eckmann J.P., and Koch H.* Period doubling bifurcations for families of maps on  $r^n$ . *J.Stat.Phys.*, 25(1), 1981.
- [29] *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm.Math.Phys.*, 50(69), 1976.
- [30] *Eckmann J.P.* Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Rev.Mod.Phys.*, 53(643), 1981.
- [31] *Ott.E.* Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems. *Rev.Mod.Phys.*, 53(655), 1981.
- [32] *Landa P.S. and Zaikin A.A.* Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis, *Phys. Rev. E* 54,4:3535-3544, 1996.
- [33] *McLaughlin J.B. and Martin P.C.* Transition to turbulence in a statistically stressed fluid system. *Phys.Rev.*, a12(186), 1975.
- [34] *Levi. M.* Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations. *Mam.Am.Math.Soc.*, 244(1), 1981.
- [35] *Ланда П.С. и Заикин А.А.* Неравновесные индуцированные шумом фазовые переходы в простых системах. *ЖЭТФ*, 111(358), 1997.

- [36] Landa P., Ginevsky A., Vlasov Yu. and Zaikin A. Turbulence and Coherence Structures in Subsonic Submerged Jets. Control of the Turbulence. *to appear in Int. J. of Bif. and Chaos.*
- [37] Rotta J. *Ing.-Arch.*, 24(258), 1956.
- [38] Vidal C., Roux J.C., Bachelart S., and Rossi A. Experimental study of the transition to turbulence in the belousov-zhabotinsky reaction. *Ann.NY Acad.Sci.*, 357(377), 1980.
- [39] Roux J.C. and Swinney H.L. Topology of chaos in a chemical reaction. In C.Vidal and A.Pacault, editors, *Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics*, Springer Series in Synergetics. Springer, 1981.
- [40] Turner J.S., Roux J.C., McCormick W.D., and Swinney H. Alternative periodic and chaotic regimes in a chemical reaction. *Phys.Lett.*, A85(9), 1981.
- [41] Glansdorf P. and Prigogine I. *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations.* Wiley, N.Y., 1971.
- [42] Landa P.S. and Rosenblum M.G. Time Series Analysis for System Identification and Diagnostics *Physica D*, 48, 232-254, 1991.
- [43] Haken H. *Handbuch der Physik/Encyclopedia of Physics*, volume XXV/2c. Springer, Berlin, Heidelberg, N.Y., 1970.
- [44] Pikovsky A. On the Interaction of Strange Attractors. *Z.Physik B*, 55(149), 1984.
- [45] Haken H. *Laser Theory.* Springer, Berlin, Heidelberg, N.Y., 1983.
- [46] Haken H. Introduction to synergetics. In H. Haken, editor, *Synergetics. Cooperative Phenomena in Multi-Component Systems*, page 9. Teubner, Stuttgart, 1973.
- [47] Graham R. Phase-transition-like phenomena in lasr and nonlinear optics. In H.Haken, editor, *Synergetics. Cooperative Phenomena in Multi-Component Systems.* Teubner, Stuttgart, 1973.

- [48] *Graham R.* The phase transition concept and coherence in atomic emission. In E. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume 12. Amsterdam:North-Holland, 1974.
- [49] *Nitzan A., Ortoleva P., Deutch J., and Ross J.* Fluctuations and transitions at chemical instabilities: the analogy to phase transitions. *J.Chem.Phys.*, 61(1056), 1974.
- [50] *Haken H.* Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems. *Rev. Mod. Phys.*, 47(67), 1975.
- [51] *Haken H. Synergetics. An Introduction.* Springer Series in Synergetics, Berlin, Heidelberg, N.Y., 1980.
- [52] *Graham R.* Onset of cooperative behaviour in nonequilibrium steady states. In G.Nicolis, G.Dewel, and J.Turner, editors, *Order and Fluctuations in Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, page 235. Wiley, N.Y., 1981.
- [53] *Blekhman I., Landa P., and Rosenblum M.* Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems. *Appl. Mech. Rev.*, 48:733-752, 1995.
- [54] *Андронов А., Витт А., Хайкин С. Теория колебаний.* Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [55] *Hayashi C. Nonlinear oscillations in physical systems.* McGraw-Hill, N.Y., 1964.
- [56] *Блехман И. Синхронизация в науке и технике.* Наука, Москва, 1981.
- [57] *Ebeling W. and Fistel R. Physik der Selborganisation und Evolution.* Akademie Verlag, Berlin, 1982.
- [58] *Ebeling W., Engel H., and Herzog H. Selborganisation in der Zeit.* Akademie Verlag, Berlin, 1990.

- [59] *Fujisaka H. and Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Prog. Theor. Phys.*, 69:32–47, 1983.
- [60] *Климонтович Ю.Л.* Что же такое турбулентность?, Прикладная Нелинейная Динамика, 1995, т. 3, N 2, сс. 7–37.
- [61] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. Москва: Наука, 1995.
- [62] *Pecora L. and Carroll T.* Synchronization in chaotic systems. *Phys.Rev.Lett*, 64:821–824, 1990.
- [63] *Ланда П.С.* Так что же такое турбулентность? , Прикладная Нелинейная Динамика, 1995, т. 3, N 2, сс. 37–41.
- [64] *Ланда П.С.* Возникновение турбулентности в незамкнутых течениях жидкости как неравновесный шумоиндуцированный фазовый переход второго рода, ЖТФ, 1997, т. 67, N 7.
- [65] *Никитин Н.В.* Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения , Изв. РАН, МЖГ, 1994, N 6, сс. 14–26.
- [66] *Рытов С.М.* Памяти Г.С. Горелика, УФН, 1957, т. 62, в. 4, сс. 485–496.
- [67] *Гольдштик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
- [68] *Стрелков С.П.* К теории автоколебаний в аэродинамической трубе с открытой рабочей частью , ЖТФ, 1941, т. 11, в. 13-14, сс. 1203–1210.
- [69] *Никитин Н.В.* Пространственный подход к численному моделированию турбулентности в трубах, ДАН, 1995, т. 343, N 6, сс. 767–770.
- [70] *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. Москва: Наука, 1980.

- [71] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986.
- [72] Ланда П.С., Розенблум М.Г. О синхронизации хаотических автоколебательных систем, ДАН СССР, 1992, т. 324, 1, сс. 65–68.
- [73] Landa P. and Rosenblum M. Synchronization and chaotization of oscillations in coupled self-oscillating systems. *Appl.Mech.rev.*, 46:414–426, 1993.
- [74] Ланда П.С., Перминов С. Взаимодействие периодических и стохастических автоколебаний. *Электроника*, 28:285–287.
- [75] Кузнецов Ю.И., Ланда П.С., Ольховой А.Ф., Перминов С.М. Связь между амплитудным порогом синхронизации и энтропией в стохастических автоколебательных системах, ДАН СССР, 1985, 281, 2, сс. 291–294.
- [76] Bezaeva L., Kaptsov L., and Landa P. Synchronization threshold as the criterium of stochasticity in the generator with inertial nonlinearity. *Sov.Phys.-Tech.Phys.*, 31:1105–1107, 1986.
- [77] Dykman G., Landa P., and Neymark Yu. Synchronizing the chaotic oscillations by external force. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1:339–353, 1992.
- [78] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., and Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys.Rev.Lett*, 76:1804–1807, 1996.
- [79] Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., and Kurths J. *Physica D*, 104, 219, 1997.
- [80] Ahlers G. Low-temperature studies of the rayleigh-benard instability and turbulence. *Phys.Rev.Lett*, 33:1185, 1974.
- [81] Gollub J.P. and Swinney H.L. Onset of turbulence in a rotating fluid. *Phys.Rev.Lett*, 35:927, 1975.

- [82] Gollub J.P. Benson S.V. Many routes to turbulent convection. *J. Fluid Mech.*, 100:449, 1980.
- [83] H.L. Swinney and J.P. Gollub, editors. *Hydrodynamics Instabilities and Transition to Turbulence*. Topics Appl.Phys. Springer, Berlin, Heidelberg, N.Y., 1978.
- [84] Berge P., Dubois M., Manneville P., and Pomeau Y. Intermittency in rayleigh-benard convection. *J.Phys. Paris Lett.*, 41(L341), 1980.
- [85] C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo, J. Armero, and A. Hernández-Machado. Mean field model for spatial extended systems in the presence of multiplicative noise. *Phys. Rev. E*, 49:2639, 1994.
- [86] J.M.R. Parrondo C., Van den Broeck, and F. Javier de la Rubia J. Buceta. Noise-induced spatial patterns. *Physica A*, 224:153, 1996.
- [87] P.S. Landa. *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston, 1996.
- [88] Yu. I. Neimark and P.S. Landa. *Stochastic and Chaotic Oscillations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston, 1992.
- [89] S. Corrsin. *NACA Advis. Conf. Rep.*, page 3123, 1943.
- [90] Control of Chaos: New Perspectives in Experimental and Theoretical Nonlinear Science, Third Euroconference on Nonlinear Dynamics in Physics and Related Science, Book of Abstracts, Montecatini Terme, 16-18 May 1997, Italy.
- [91] Y. Pomeau and P. Manneville. *Comm. Math. Phys.*, 74, 1980.
- [92] P.S. Landa and M.G. Rosenblum. *Physica D*, 48:232, 1991.
- [93] A. R. Osborne and A.Provenzale. *Physica D*, 35:357, 1989.
- [94] J. Theiler. Some comments on the correlation dimension of  $1/f^\alpha$  noise. *Phys. Lett. A*, 155:480, 1991.
- [95] J.B. McLaughlin. *J. Stat. Phys.*, 24:375, 1981.

- [96] *Р.Л. Стратонович, Ю.М. Романовский*, Научные доклады высшей школы, сер. физ.-мат., **3**, 221 (1958).
- [97] *Р.Л. Стратонович*, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике*. Сов. Радио, Москва (1961).
- [98] *М.Ф. Диментберг*, *Нелинейные стохастические задачи механических колебаний*. Наука, Москва (1980).
- [99] *С.М. Рытов*, *Введение в статистическую радиофизику*. Наука, Москва (1966), с. 264.
- [100] *Л.А. Вайнштейн, Д.Е. Вакман*, *Разделение частот в теории колебаний и волн*. Наука, Москва (1983).
- [101] *Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда*, *Стохастические и хаотические колебания*. Наука, Москва (1987).
- [102] *Н.В. Никитин*, МЖГ, **14** (1994).
- [103] *Ю.Л. Климонтович*, *Турбулентное движение и структура хаоса*. Наука, Москва (1990).
- [104] *Ю.Л. Климонтович*, УФН, **158**, 59 (1989).
- [105] *Н.Н. Боголюбов*, В сб. Ин-та строит. механики АН УССР, **14**, 9 (1950).
- [106] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*, *Механика*. Наука, Москва (1965).
- [107] *В.В. Болотин, В.И. Воробьев, В.А. Семенов, В.К. Чернов*, МТТ, No 1, 36 (1979).
- [108] *И.И. Блехман*, *Вибрационная механика*. Наука, Москва (1994).
- [109] *П.Л. Капица*, ЖЭТФ, **21**, 588, (1951).
- [110] *П.Л. Капица*, УФН, **44**, 7 (1951).
- [111] *Schuster H.G. Deterministic Chaos*. Physic-Verlag, Weinheim, 1984.

- [112] *Manneville P. Dissipative Structures and Weak Turbulence.* Academic, New York, 1990.
- [113] *Platt N., Spiegel E.A, and Tresser C.* On-off intermittency: a mechanism for bursting. *Phys. Rev. Lett.*, 70(3):279–282, 1993.
- [114] *Fujisaka H. and Yamada T.* A new intermittency in coupled dynamical systems. *Progr. Theor. Phys.*, 74(4):918–921, 1985.
- [115] *Heagy J.F. Platt N. and Hammel S.M.* Characterization of on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, 49:1140–1150, 1994.
- [116] *Ланда П.С., Стратонович Р.Л.* К теории флуктуационных переходов различных систем из одного стационарного состояния в другое, *Вестник МГУ(физика, астрономия)*, 1,33, 1962.
- [117] *C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo, and R. Toral.* Noise-induced nonequilibrium phase transition. *Phys. Rev. Lett.*, 73:3395, 1994.
- [118] *P.S. Landa, A.A. Zaikin, M.G. Rosenblum, and J. Kurths.* On-off intermittency phenomena in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 11-12, (1997).
- [119] *U.Frisch and R.Morf.* *Phys. Rev. A*, 23(2673), 1981.
- [120] *Власов Ю.В., Гиневский А.С.* Генерация и подавление турбулентности в осесимметричных турбулентных струях в присутствии акустического воздействия *Механика жидкости и газа*, (6):37–43, 1973. English translation in: NASA TT F 15721, (1974).
- [121] *Zaman K.M.B.Q. and Hussain A.K.M.F.* Turbulence suppression in free shear flows by controlled excitation. *J. Fluid Mech.*, 103:133–159, 1981.
- [122] *Nallasamy M. and Hussain A.K.M.F.* Effects of excitation on turbulence levels in a shear layer. *Trans. ASME*, 111:102–104, 1989.
- [123] *Landa P.S.* Turbulence in nonclosed fluid flows as a noise-induced phase transition. *Europhys. Lett.*, 36(6):401–406, 1996.

- [124] *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* К теории асинхронного возбуждения, Собр. трудов, т.2. Москва: изд-во АН СССР, 1947.
- [125] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.:Наука, 1984.
- [126] *R.L. Stratonovich. Topics in the Theory of Random Noise.* Gordon and Breach, New York, 1963.
- [127] *Власов Ю.В., Гиневский А.С.* Когерентные структуры в турбулентных струях и следах, ВИНТИ АН СССР, Итоги науки и техники, Механика жидкости и газа, т. 20, сс. 3–84, 1986.
- [128] *Browand F.K. and Laufer J.* The role of large scale structures in the initial development of circular jets. In *Turbulence in Liquids*, Proc. IV Biennial Symp. Turbulence Liquids, Sept. 1975, pages 333–344, Princeton, New Jersey, 1977.
- [129] *Ho Chih-Ming and Huerre P.* Perturbed free shear layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 16:365–424, 1984.
- [130] *Hussain A.K.M.F.* Coherent structures – reality and myth. *Phys. Fluids*, 26(10):2816–2859, 1983.
- [131] *Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.* Моделирование турбулентных струй и следов методом дискретных вихрей. Москва: Наука, 1995.
- [132] *Гиневский А.С.* Теория Турбулентных струй и следов, Машиностроение, Москва, 1969.
- [133] *Michalke A.* Survey on jet instability theory. *Progr. Aerosp. Sci.*, 21(3):159–199, 1984.
- [134] *Metcalf R.W. and Riley J.J.* Direct numerical simulations of turbulent shear flows. *Lect. Notes Phys.*, 141:279–284, 1981.
- [135] *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. Москва: Наука, 1984.

- [136] *Ashurst W.T.* Numerical simulation of turbulent mixing layers via vortex dynamics. In *Turbulent Shear Flow 1. 2nd Int. Symp., London, 1979*. Springer, Berlin, 1980.
- [137] *Inoue O.* Vortex simulation of a turbulent mixing layer. *AIAA Journal*, 23(3):367–373, 1985.
- [138] *Leonard A.* Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 17:523–599, 1985.
- [139] *Leonard A.* Vortex methods for flow simulation. *J. Comput. Phys.*, 37:1298, 1990.
- [140] *Rayleigh ( Strutt J.W. ).* On the instability of jets. *Proc. London Math. Soc.*, 10:4–13, 1879.
- [141] *Crighton D.G. and Gaster M.* Stability of slowly diverging jet flow. *J. Fluid Mech.*, 77:397–413, 1976.
- [142] *Plaschko P.* Helical instabilities of slowly diverging jets. *J. Fluid Mech.*, 92:209–215, 1979.
- [143] *Plaschko P.* Axial coherence functions of circular turbulent jets based on inviscidly calculated damped modes. *Physics of Fluids*, 26(9):2368–2372, 1983.
- [144] *Герценштейн С.Я., Сухоруков А.Н.* О нелинейной эволюции двумерных и трехмерных волн в слоях смешения, Изв. АН СССР, МЖГ, 1985, 1, сс. 10–18.
- [145] *Hinze J.O.* *Turbulence. An Introduction to its Mechanism and Theory.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1959.
- [146] *Yule A.J.* Large scale structures in the mixing layer of a round jet. *J. Fluid Mech.*, 89(3):413–432, 1978.
- [147] *Petersen R.A.* Influence of wave dispersion on vortex pairing in a jet. *J. Fluid Mech.*, 89(3):469–495, 1978.

- [148] *Ho Chih-Ming*. Local and global dynamics of free shear layers. In *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows*, pages 521–533. New York, 1982.
- [149] *Laufer J. and Monkevitz P.* On turbulent jet flows: a new perspective. *AIAA Pap.*, (967), 1980.
- [150] *Crow S.C. and Champagne F.H.* Orderly structure in jet turbulence. *J.Fluid Mech.*, 48:547–591, 1971.
- [151] *Chan Y.Y.* Spatial waves in turbulence jets. *Phys. Fluids*, 17(1,9):46–53,1667–1670, 1974.
- [152] *A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum and J. Kurths.* Synchronization in a Population of Globally Coupled Chaotic Oscillators. *Europhys. Lett.*, 34, 1996.
- [153] *A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov and J. Kurths.* Phase Synchronization of Chaotic Oscillators by External Driving. *Physika D* in press.
- [154] *Власов Е.В., Гиневский А.С.* Акустическое воздействие на аэродинамические характеристики турбулентной струи, *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1967, 4, сс. 133–138.
- [155] *Борисов Ю.Я., Гункина Н.М.* Вобуждение высокоскоростных струй акустическими колебаниями, *Акустический журнал*, 21(3):364–371, 1975.
- [156] *Nallasamy M.* Turbulence suppression at high amplitudes of excitation: numerical and experimental study. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 28:1380, 1983.
- [157] *Nallasamy M. and Hussain A.K.M.F.* Numerical study of the phenomenon of turbulence suppression in a plane shear layer. *Turbulent Shear Flows*, 4:169–181, 1984.
- [158] *Kibens V.* Discrete noise spectrum generated by an acoustically excited jet. *AIAA Journal*, 18(4):434–441, 1980.

- [159] *Dietz K.* The incidence of infectious diseases under the influence of seasonal fluctuations. *Lect. Notes Biomath*, 11:1-15, 1976.
- [160] *Pool R.* Is it chaos, or is it just noise? *Science*, 243:25-28, 1989.
- [161] *Grenfell B.T.* Chance and chaos in measles dynamics, *J.R.Statist. Soc.*, B54:383-398, 1992.
- [162] *Olsen L.F. and Degn H.* Chaos in biological systems *Quarterly Review of Biophysics*, 18,2:165-225, 1985.
- [163] *Olsen L.F. and Schaffer W.M.* Chaos versus noisy periodicity: Alternative hypothesis for childhood epidemics *Science*, 249:499-504, 1990.
- [164] *Engbert R. and Drepper F.R.* Chance and chaos in population biology - models of recurrent epidemics and food chain dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*, 4,7:1147-1169, 1994.
- [165] "Spatial Heterogeneity in Epidemics Models", *J.theor.Biol*, 179:1-11, 1996.
- [166] *Grenfell B.T., Bolker B.M. and Kleczkowski A.* Seasonality and extinction in chaotic metapopulations *Proc.R.Soc. Lond.B*, 259:97-103, 1995.
- [167] *London W.P. and Yorke J.A.* Recurrent outbreaks of measles, chickenpox and mumps, I: Seasonal variation in contact rates, *Am. J.Epidem*, 98:453-468, 1973.
- [168] *Landa P.S., Zaikin A.A., Rosenblum M.G. and Kurths J.* The control of noise-induced oscillations of a pendulum with a randomly vibrating suspension axis, *Phys. Rev. E.*, **56**, 1465, 1997.
- [169] *Garsia-Ojalvo J., Parrondo J.M.R., Sancho J.M., and Van den Broeck C.* Reentrant transition induced by multiplicative noise in the time-dependent Ginzburg-Landau model, *Phys.Rev.E.*, 54,6:6918-6921, 1996.

- [170] *Seunghwan Kim, Seon Hee Park, and Chang Su Ryu.* Noise-enhanced multistability in coupled oscillator systems, *Phys. Rev. Let.*, 78,9:1616-1619, 1997.
- [171] *Seon Hee Park and Seunghwan Kim.* Noise-induced phase transitions in globally coupled active rotators, *Phys. Rev. E*, 53,4:3425-3430,1996.
- [172] *Rogers J.L. and Wille L.T.* Phase transitions in nonlinear oscillator chains, *Phys. Rev. E*, 54,3:2193-2196, 1996.
- [173] *Landa P.S. and Zaikin A.A.* Random and Chaotic Oscillations in a model of Childhood Epidemics Caused by Seasonal Variations of the Contact Rate, (to appear in AIP-press).