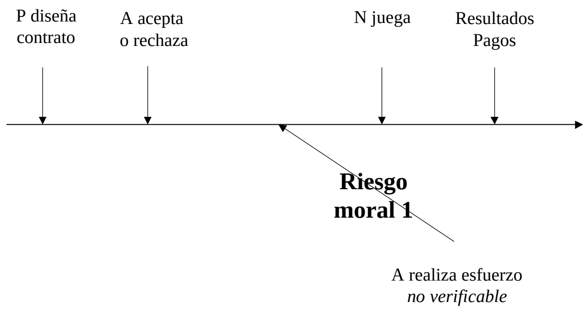
Microeconomía I: Riesgo moral
Apuntes del tema 3
Profesora: Esther Hauk

Desarrollo temporal: riesgo moral



Riesgo Moral

- Comportamiento (esfuerzo) del agente no observable
- ahora el principal tiene que dar *incentivos* al agente para elegir el esfuerzo que más conviene al principal => hay dos restricciones:
  - condición de participación
  - *restricción de incentivos*
- concepto de solución: equilibrio bayesiano perfecto en subjuegos

Contrato óptimo

- el salario depende del resultado de la venta
- el contrato debe ofrecer una utilidad mayor que la utilidad de reserva (*restricción de participación, de racionalidad individual*)
- el contrato debe ofrecer una utilidad más alta para el esfuerzo más alto (*restricción de incentivos*)

Riesgo Moral

$$\max_{[e,\{w(x_i)\}_{i=1,\dots,n}]} \sum_{i=1}^{n} p_i(e)B(x_i - w(x_i))$$

$$\text{t.q.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(e)u(w(x_i)) - v(e) \geq \underline{U}$$

$$\underbrace{e \in \arg\max_{\bar{e}}\{\sum_{i=1}^{n} p_i(\bar{e})u(w(x_i)) - v(\bar{e})\}}_{\textit{Restricción de incentivos}}$$

El problema en general

El problema con dos esfuerzos

Dos esfuerzos posibles

- Esfuerzos $e \in \{e^H, e^L\}$ con $v(e^H) > v(e^L)$
- resultados $x_1 < x_2 < x_3 < \dots\dots\dots < x_n$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^H < \sum_{i=1}^{k} p_i^L \quad \text{para } \forall k = 1,\dots, n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^H = \sum_{i=1}^{n} p_i^L = 1$$

- situación interesante: principal quiere conseguir esfuerzo alto

Programa con 2 esfuerzos (principal neutral al riesgo)

$$\max_{[\{w(x_i)\}_{i=1,\dots,n}]} \sum_{i=1}^{n} p_i^H[x_i - w(x_i)]$$

$$\text{t.q.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i^H u(w(x_i)) - v(e^H) \geq \underline{U}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [p_i^H - p_i^L]u(w(x_i)) \geq v(e^H) - v(e^L)$$

Lagrangiano:

$$L(\{w(x_i)\}, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n} p_i^H[x_i - w(x_i)] +$$

$$\lambda\left[\sum_{i=1}^{n} p_i^H u(w(x_i)) - v(e^H) - \underline{U}\right]$$

$$+ \mu\left[\sum_{i=1}^{n} [p_i^H - p_i^L]u(w(x_i)) - v(e^H) + v(e^L)\right]$$

CPO: con respecto al salario

$$-p_i^H + \lambda p_i^H u'(w(x_i)) + \mu\left[p_i^H - p_i^L\right]u'(w(x_i)) = 0 \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_i^H}{u'(w(x_i))} = \lambda p_i^H + \mu\left[p_i^H - p_i^L\right] \quad \forall i \qquad (*)$$

Sumando (*) desde i=1 hasta i=n

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^H}{u'(w(x_i))} > 0$$

Escribiendo CPO (*) como:

$$\frac{1}{u'(w(x_i))} = \lambda + \mu\left[1 - \frac{p_i^L}{p_i^H}\right] \quad \forall i \quad \Rightarrow \mu \neq 0 \quad (\mu > 0)$$

Interpretación de CPO

- Ambos restricciones son saturadas
- μ>0 significa
  - un coste para el principal (menos beneficios)
  - pagos varían en función del resultado
  - los pagos serán mayores cuanto más pequeña sea el cociente de verosimilitud: p_i^L / p_i^H

Pago óptimo

condición necesaria para que un mejor resultado conlleve un mejor pago es la *propiedad de cociente de verosimilitud monótono* (decreciente en i)

$$u'(w(x_i)) = \frac{1}{\lambda + \mu\left[1 - \frac{p_i^L}{p_i^H}\right]} \quad \Leftrightarrow$$

$$w(x_i) = (u')^{-1}\left(\frac{1}{\lambda + \mu\left[1 - \frac{p_i^L}{p_i^H}\right]}\right)$$

Ejemplo numérico riesgo moral:

Ilustración: riesgo moral

- principal neutral al riesgo contrata a agente
- el agente tiene utilidad de reserva $\underline{U}$ = 9
- el agente elige entre esfuerzo (no observable) a=5 (alto) o a=0 (bajo).

Resultado de venta	0	100	400	Valor de venta
Con e=5	0,1	0,3	0,6	270
Con e=0	0,6	0,3	0,1	70

- utilidad del agente: $\boldsymbol{U(w,a) = \sqrt{w} - a}$
  - w = salario, agente averso al riesgo

- agente acepta el contrato si $\boldsymbol{U(w,a) \geq \underline{U}}$
- salario mínimo: w(a=0)=81 y w(a=5)=196
- el esfuerzo alto es óptimo para principal:
  - 270-w(a=5)=74>70-w(a=0)=-11<0
- Cómo inducir el agente a a=5?
  - Salario fijo resultaría en a=0 !
  - Dado a no es observable, salario no puede ser contingente al esfuerzo elegido
  - salario debe ser vinculado a una medida observable vinculado indirectamente con a: el *resultado de venta*

Formulación matemática

- El principal busca los salarios mínimos qué satisfacen las dos restricciones: x, y, z son los salarios que corresponden a un valor de ventas de 0, 100, 400 respectivamente

$$\min_{x,y,z} \quad 0{,}1\,x + 0{,}3\,y + 0{,}6\,z$$

tal que

$$0{,}1\sqrt{x} + 0{,}3\sqrt{y} + 0{,}6\sqrt{z} - 5 \geq 9 \qquad \textbf{(P)}$$

$$0{,}1\sqrt{x} + 0{,}3\sqrt{y} + 0{,}6\sqrt{z} - 5 \geq$$

$$0{,}6\sqrt{x} + 0{,}3\sqrt{y} + 0{,}1\sqrt{z} \qquad \textbf{(I)}$$

• resultado: x=29,46 y=196 z=238

• salario esperado = 204,56 => beneficio principal 65,44 (comparado con 74 cuando a observable)

Formulación matemática

- Calculo más fácil si definimos variables nuevos:

$$r^2 = x,\; s^2 = y,\; t^2 = z$$

$$\min_{r,s,t} \quad 0{,}1 r^2 + 0{,}3 s^2 + 0{,}6 t^2$$

tal que

$$0{,}1 r + 0{,}3 s + 0{,}6 t - 5 \geq 9 \qquad \textbf{(P)}$$

$$0{,}1 r + 0{,}3 s + 0{,}6 t - 5 \geq$$

$$0{,}6 r + 0{,}3 s + 0{,}1 t \qquad \textbf{(I)}$$

CPO:

$$\begin{aligned}
C1 &: \quad 0 = 0{,}2 r - 0{,}1\lambda + 0{,}5\mu \\
C2 &: \quad 0 = 0{,}6 s - 0{,}3\lambda \qquad \Rightarrow \quad \lambda = 2s > 0 \\
C3 &: \quad 0 = 1{,}2 t - 0{,}6\lambda - 0{,}5\mu
\end{aligned}$$

Utilizando el valor de λ C1 y C3 implican

$$0{,}5\mu = 0{,}2(s - r) = 1{,}2(t - s) > 0$$

Por lo tanto ambos restricciones están saturados y podemos encontrar s,r,t resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&0{,}1 r + 0{,}3 s + 0{,}6 t - 5 = 9 && \textbf{(P)} \\
&0{,}1 r + 0{,}3 s + 0{,}6 t - 5 = 0{,}6 r + 0{,}3 s + 0{,}1 t && \textbf{(I)} \\
&0{,}2 r - 1{,}4 s + 1{,}2 t = 0 && \textbf{(C1 + C3)}
\end{aligned}$$

Resultados: r=5,42 por lo tanto x=29,46
s=14 por lo tanto y=196
t=15,42 por lo tanto z=238

el problema del riesgo moral con un esfuerzo continuo

Enfoque de primer orden: esfuerzo continuo

- esfuerzo como variable continuo => doble maximización:
  - principal maximiza beneficios
  - restricción de incentivos es otra maximización
- enfoque de primer orden (Holmström): sustituir la maximización del agente por su CPO
  - no es siempre valido
  - es sólo una condición necesaria

Enfoque de primer orden

$$\max_{[e,\{w(x_i)\}_{i=1,\dots,n}]} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(e)(x_i - w(x_i))$$

$$\text{t. q.} \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_i(e)u(w(x_i)) - v(e) \geq \underline{U} \qquad (\lambda)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi'_i(e)u(w(x_i)) - v'(e) = 0 \qquad (\mu)$$

Enfoque de primer orden: CPO

$$-\pi_i(e) + \lambda \pi_i(e)u'(w(x_i)) + \mu \pi'_i(e)u'(x_i)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{u'(w(x_i))} = \lambda + \mu \frac{\pi'_i(e)}{\pi_i(e)}$$

Cociente de verosimilitud

Si el cociente de verosimilitud es creciente con i=1,…,n, es más verosímil que cuando el esfuerzo es alto el resultado sea bueno

Enfoque de primer orden: esfuerzo

CPO del Lagrangiano con respecto al esfuerzo

$$\sum_{i=1}^{n} p'_i(e)(x_i - w(x_i)) + \mu\left[\sum_{i=1}^{n} p''_i(e)u(w(x_i)) - v''(e)\right] = 0$$

Es decir

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p'_i(e)x_i}_{\text{Beneficios marginales}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p'_i(e)w(x_i) - \mu\left[\sum_{i=1}^{n} p''_i(e)u(w(x_i)) - v''(e)\right]}_{\text{Costes marginales}}$$

Riesgo Moral ↔información simétrica

- Información simétrica:
  - la restricción de participación determina el nivel óptimo de esfuerzo

$$\sum_{i=1}^{n} p'_i(e)x_i = \sum_{i=1}^{n} p'_i(e)w(x_i) - \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} p'_i(e)u(w(x_i)) - v'(e)\right]$$

- riesgo moral:
  - el coste de la restricción de incentivos es el elemento más importante en la determinación del esfuerzo

$$\sum_{i=1}^{n} p'_i(e)x_i = \sum_{i=1}^{n} p'_i(e)w(x_i) - \mu\left[\sum_{i=1}^{n} p''_i(e)u(w(x_i)) - v''(e)\right]$$

una ilustración con esfuerzo continuo

Un caso sencillo con esfuerzo continuo

- Función de probabilidad tiene la *condición de linealidad de la función de distribución*

$$p_i(e) = ep_i^H + (1-e)p_i^L$$

como una estrategia mixta en el caso de dos esfuerzos

- utilidad esperada del agente

$$EU(e) = \sum_{i=1}^{n}\left[ep_i^H + (1-e)p_i^L\right]u(w(x_i)) - v(e)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i^L u(w(x_i)) + \sum_{i=1}^{n} e\left[p_i^H - p_i^L\right]u(w(x_i)) - v(e)$$

Enfoque de primer orden valido

- Suponemos que la solución no puede estar en la frontera

  v'(0)=0 y v'(1)=+∞

- EU(e) es cóncava con respecto al esfuerzo

  EU''(e)=-v''(e)≤0

- un esfuerzo verifica la restricción de incentivos si y sólo si verifica CPO

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\pi_i^H - \pi_i^L\right] u(w(x_i)) = v'(e)$$

Programa del Principal

$$\max_{\left[e,\{w(x_i)\}_{i=1,\dots,n}\right]} \sum_{i=1}^{n} \left[e\pi_i^H + (1-e)\pi_i^L\right](x_i - w(x_i))$$

$$\text{t.q.} \quad \sum_{i=1}^{n} \left[e\pi_i^H + (1-e)\pi_i^L\right] u(w(x_i)) - v(e) = \underline{U} \qquad (\lambda)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\pi_i^H - \pi_i^L\right] u(w(x_i)) - v'(e) = 0 \qquad (\mu)$$

CPO:

pago
$$\frac{1}{u'(w(x_i))} = \lambda + \mu \left[\frac{\pi_i^H - \pi_i^L}{\left[e\pi_i^H + (1-e)\pi_i^L\right]}\right]$$

Si esto es creciente en los resultados el pago crece con estos

condición suficiente: π_i^L / π_i^H decreciente en i

esfuerzo
$$\sum_{i=1}^{n} \left[\pi_i^H - \pi_i^L\right](x_i - w(x_i)) - \mu v''(e) = 0$$

La restricción de incentivos es cóncava si v'''(e)≥0