C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 91–94, 2000
Statistique/*Statistics*
(Probabilités/*Probability Theory*)

Non-causalité et discrétisation fonctionnelle, théorèmes limites pour un processus $\mathrm{ARHX}(1)$

Serge GUILLAS

Université Paris-VI et
École des mines de Douai, 941, rue Charles-Bourseul, B.P. 838, 59508 Douai cedex, France
Courriel : guillas@ensm-douai.fr

(Reçu le 6 mars 2000, accepté après révision le 11 mai 2000)

Résumé. Nous généralisons à des processus à valeurs dans un espace de Banach différentes notions de non-causalité en temps discret et en temps continu. Nous nous intéresserons à la préservation de la non-causalité par discrétisation fonctionnelle d'un processus à trajectoires continues. Enfin, nous établirons des théorèmes limites (loi des grands nombres et théorème central limite) pour des processus autorégressifs hilbertiens d'ordre un avec variables exogènes. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Noncausality and functional discretization, limit theorems for an $\mathbf{ARHX}(\mathbf{1})$ ***process***

Abstract. *We generalize to Banach valued processes various concepts of noncausality in discrete and continuous time. Preservation of noncausality by functional discretization of a process with continuous sample paths is then considered. Finally, limit theorems* (*law of large numbers and central limit theorem*) *are established for autoregressive Hilbertian processes of order one with exogenous variables.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Non-causalité et discrétisation fonctionnelle

Soient $(x_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$, $(z_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ deux processus à trajectoires continues définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Posons :

$$\begin{aligned} X_k(t) &= x_{k\delta+t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \\ Z_k(t) &= z_{k\delta+t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

(X_k) et (Z_k) sont à valeurs dans $\mathrm{C}[0, \delta]$. On peut considérer aussi ces trajectoires dans $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$ et ainsi (X_k) et (Z_k) sont des processus à valeurs dans $\mathrm{L}^2([0, \delta])$. Cette discrétisation fonctionnelle permet de manipuler des portions de trajectoires. Des modèles autorégressifs banachiques ou hilbertiens ont été étudiés par

Note présentée par Paul DEHEUVELS.

S0764-4442(00)00503-6/FLA

Bosq dans [2] et des applications se trouvent dans [1] ou [3]. Posons $\mathcal{F}_t = \sigma((x_u, z_u),\ 0 \leqslant u \leqslant t)$ et $\mathcal{Z}_t = \sigma(z_u, 0 \leqslant u \leqslant t)$. Ainsi pour tout t, $\mathcal{Z}_t \subset \mathcal{F}_t$.

La notion de non-causalité a été historiquement introduite par Granger [6] et Sims [11]. Les définitions de non-causalité en temps discret ou continu sont issues de Florens et Fougère [5], ici généralisées à des processus à valeurs dans un espace de Banach. L'information contenue dans l'échantillon $(X_0, \ldots, X_{n-1})$ est la même que celle contenue dans (x_u, $0 \leqslant u \leqslant n\delta$), ce qui permet d'écrire :

PROPOSITION 1. – *Si on pose* $\mathcal{F}_n^{(D)} = \sigma((X_k, Z_k), k = 0, \ldots, n-1)$ *et* $\mathcal{Z}_n^{(D)} = \sigma(Z_k, k = 0, \ldots, n-1)$*, alors pour tout entier* n*,* $\mathcal{F}_n^{(D)} = \mathcal{F}_{n\delta}$ *et* $\mathcal{Z}_n^{(D)} = \mathcal{Z}_{n\delta}$.

PROPOSITION 2. – *Supposons que* $(\mathcal{F}_t)$ *ne cause pas fortement globalement* $(\mathcal{Z}_t)$*, alors* $\left(\mathcal{F}_n^{(D)}\right)$ *ne cause pas fortement globalement* $\left(\mathcal{Z}_n^{(D)}\right)$.

PROPOSITION 3. – *Supposons que* $(\mathcal{F}_t)$ *ne cause pas faiblement globalement* $(\mathcal{Z}_t)$*, alors* $\left(\mathcal{F}_n^{(D)}\right)$ *ne cause pas faiblement globalement* $\left(\mathcal{Z}_n^{(D)}\right)$.

Les preuves se trouvent dans [7].

La non-causalité instantannée se définit par la conservation de la décomposition d'une semi-martingale spéciale en la somme d'un processus prévisible et d'une martingale locale lorsque la filtration de référence $(\mathcal{Z}_t)$ est remplacée par $(\mathcal{F}_t)$. On peut voir qu'il est possible de discrétiser chaque membre de la décomposition d'une semi-martingale spéciale continue car ceux-ci sont eux-même continus par [8], p. 86–87. La question qui se pose est ainsi la suivante : si $(\mathcal{F}_t)$ ne cause pas instantanément $(\mathcal{Z}_t)$, alors est-ce que $\left(\mathcal{F}_n^{(D)}\right)$ ne cause pas instantanément $\left(\mathcal{Z}_n^{(D)}\right)$?

Vu la relation entre prévisibilité et non-causalité [5], lemme 3.1 (que l'on peut adapter au temps discret), la réponse est non. Intuitivement, il semble impossible de passer d'une propriété infinitésimale en « t^- » à un saut de longueur δ.

Par ailleurs, Comte et Renault [4] ont comparé, dans le cas d'un processus bivarié $X = (X_1, X_2)$ solution d'une équation différentielle stochastique d'ordre un les propriétés de non-causalité du processus et du processus échantilloné. Il ont montré que la non-causalité de Granger locale de X_2 sur X_1 implique la non-causalité de Granger en temps discret de X_2 sur X_1 échantillonés avec un pas de Δt pour tout horizon.

Dans notre contexte, il est naturel de se demander si la connaissance des échantillons $\{X_i(j/k), 1 \leqslant j \leqslant k\}$, $\{Z_i(j/k), 1 \leqslant j \leqslant k\}$, $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ permet d'obtenir des propriétés de non-causalité pour les processus à trajectoires continus sous-jacents. Ceci est vrai asymptotiquement au vu de la proposition suivante, écrite avec $\delta = 1$.

PROPOSITION 4. – *Soit* $(x_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ *un processus à trajectoires continues. Soit* (X_k) *donné par* (1)*, alors pour tout* $i \in \mathbb{N}$,

$$\sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma\left(\left\{X_i\left(\frac{j}{k}\right),\ 1 \leqslant j \leqslant k\right\}\right)\right) = \sigma(X_i).$$

2. Théorèmes limites pour un processus $\mathbf{ARHX(1)}$

On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère le modèle suivant, noté $\mathrm{ARHX}(1)$:

$$X_n = \rho(X_{n-1}) + a(Z_n) + \varepsilon_n, \tag{2}$$

avec ρ et a opérateurs linéaires et bornés de l'espace de Hilbert réel et séparable H vers H, (ε_n) un bruit blanc fort hilbertien, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans H satisfaisant pour tout entier n,

$$\mathrm{E}\,\varepsilon_n = 0, \qquad 0 < \mathrm{E}\,\|\varepsilon_n\|^2 = \sigma^2 < \infty,$$

et (Z_n) la suite de variables aléatoires exogènes. Les hypothèses de base sont les suivantes : (Z_n) faiblement stationnaire de moyenne nulle, $(\varepsilon_n) \perp\!\!\!\perp (Z_n)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \|\rho^n\| < \infty$.

On considérera deux cas particuliers. Le premier suppose la propriété d'indépendance :

$$\forall\, n, \quad X_n \perp\!\!\!\perp \sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \ldots). \tag{H1}$$

Cette hypothèse est très exigeante sur la manière dont la valeur au temps n n'influence pas les valeurs futures de la variable exogène. Pour des raisons purement techniques, les conditions plus classiques de non-causalité de Granger ont été délaissées.

Le deuxième cas est celui où (Z_n) est un $\mathrm{ARH}(1)$ de moyenne nulle (donc faiblement stationnaire) :

$$Z_n = u(Z_{n-1}) + \eta_n, \tag{H2}$$

avec u opérateur de l'espace de Hilbert H vers H tel que $\sum_{n=0}^{\infty} \|u^n\| < \infty$, (η_n) un bruit blanc fort hilbertien. Nous ne faisons dans ce cas aucune hypothèse de non-causalité.

Pour les preuves des résultats de cette section (*voir* [7]).

PROPOSITION 5. – *Le modèle* (2) *a pour unique solution faiblement stationnaire* :

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \big(\varepsilon_{n-j} + a(Z_{n-j})\big), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La série converge dans $\mathrm{L}^2_B(\Omega, \mathcal{A}, P)$*. Sous* (H1) $(a(Z_n) + \varepsilon_n)$ *est l'innovation de* (X_n)*, et si de plus* (Z_n) *est i.i.d., alors la série converge p.s.*

PROPOSITION 6. – *Soit* (X_n) *un processus* $\mathrm{ARHX}(1)$ *avec* (H1) *vérifiée. Alors* (X_n) *est un processus de Markov au sens large.*

Considérons maintenant le processus réel $(\langle X_n, v\rangle)$ avec $v \in H$.

PROPOSITION 7. – *Soit* (X_n) *un processus* $\mathrm{ARHX}(1)$ *avec* (H1) *vérifiée. Soit* v *un élément de* H *tel que* $\mathrm{E}\left(\langle \varepsilon_0, v\rangle^2\right) > 0$ *ou* $\mathrm{E}\left(\langle a(Z_0), v\rangle^2\right) > 0$*. Supposons qu'il existe un nombre réel* α *tel que*

$$\langle X_n, \rho^*(v) - \alpha v\rangle = 0 \quad \textit{p.s.}, n \in \mathbb{Z}.$$

Alors $\langle X_n, v\rangle$ *est un processus markovien au sens large. Dans ce cas* $|\alpha| < 1$ *et* $(\langle X_n, v\rangle)$ *possède la representation* $\mathrm{ARX}(1)$:

$$\langle X_n, v\rangle = \alpha\langle X_{n-1}, v\rangle + \big\langle a(Z_n), v\big\rangle + \langle \varepsilon_n, v\rangle.$$

Pour obtenir la propriété de Markov sous (H2), Shen [10] a proposé certaines hypothèses pour le modèle réel $X_{n+1} = \phi(X_n) + \psi(Z_n) + \varepsilon_n$, avec $Z_{n+1} = F(Z_n) + \eta_n$ qu'il est possible d'étendre ici.

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

THÉORÈME 1 (LGN). – *Soit* X *un* $\mathrm{ARHX}(1)$ *sous* (H1)*, ou* (H2) *avec la condition supplémentaire* $\|u\| \leqslant \|\rho\| < 1$*. Alors*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[\mathrm{L}^2_H(P)]{\textit{p.s.}} 0 \quad \textit{quand}\ n \to \infty.$$

De plus,

$$\frac{n^{1/4}}{(\ln n)^{\beta}} \frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{p.s.}, \beta > 1/2.$$

$$\frac{n^{1/2}}{u_n} \frac{S_n}{n} \underset{\mathrm{L}^2_H(P)}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{pour toute suite } u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

THÉORÈME 2 (TCL). – *Soit X un* $\mathrm{ARHX}(1)$ *sous* (H1) *ou* (H2). *Supposons que* (Z_n) *vérifie un théorème central-limite, c'est-à-dire*

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} Z_i \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0, C).$$

(*Pour des exemples*, voir [2] *ou* [9].)

Alors

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0, \Gamma_a),$$

avec

$$\Gamma_a = (I - \rho)^{-1} \big(C_\varepsilon + aCa^*\big) \big(I - \rho^*\big)^{-1}.$$

Concernant l'opérateur de covariance empirique (*cf.* Bosq [2]), en notant $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ la norme nucléaire, on peut écrire :

THÉORÈME 3. – *Soit X un* $\mathrm{ARHX}(1)$ *sous* (H1), *ou* (H2) *avec la condition supplémentaire* $\|u\| \leqslant \|\rho\| < 1$. *Alors*

$$\Big\| nC_{S_n/n} - \sum_{h=-\infty}^{+\infty} C_{X_0,X_h} \Big\|_{\mathcal{N}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{et} \quad n\mathrm{E} \Big\| \frac{S_n}{n} \Big\|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathrm{E} \langle X_0, X_h \rangle.$$

Références bibliographiques

[1] Besse P., Cardot H., Stephenson D., Autoregressive forecasting of some functional climatic variations, Scand. J. Statis. (2000) (à paraître).
[2] Bosq D., Linear Processes in Function Spaces, Springer-Verlag, 2000 (à paraître).
[3] Cavallini A., Montanari G.C., Loggini M., Lessi O., Cacciari M., Nonparametric prediction of harmonic levels in electrical network proceed, IEEE ICHPS 6, Bologna, 1994.
[4] Comte F., Renault E., Noncausality in continuous time models, Econom. Th. 12 (1996) 215–256.
[5] Florens J.-P., Fougère D., Noncausality in continuous time, Econometrica 64 (5) (1996).
[6] Granger C.W.J., Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, Econometrica 37 (1969) 424–459.
[7] Guillas S., Noncausality and functional discretization, limit theorems for an $\mathrm{ARHX}(1)$ process, Rapport technique, Université Paris-VI, ISUP-LSTA n°2000-01, 2000.
[8] Lipster R., Shiryayev A., Theory of Martingales, Kluwer, 1982.
[9] Merlevède F., Peligrad M., Utev S., Sharp conditions for the CLT linear processes in a Hilbert space, J. Theor. Probab 10 (3) (1997).
[10] Shen J., Étude probabiliste et statistique de modèles non linéaires en présence de variables exogènes, Thèse de l'université Paris-VI, 1995.
[11] Sims C.A., Money, income and causality, Amer. Econom. Rev. 62 (1972) 540–552.