# Ein konstruktivistischer Blick auf mathematische Modelle

Christian Hennig

30. Januar 2001

**Zusammenfassung:** In der Physik und den Naturwissenschaften werden mathematische Modelle mit großer Selbstverständlichkeit angewandt. In der Psychologie und anderen Wissenschaften ist ihre Rolle jedoch umstritten. Mathematische Formalisierung wird oft als Voraussetzung für "objektive" Wissenschaft angesehen. Es gibt jedoch Zweifel, ob Lebendiges angemessen formalisiert werden könne. Ich möchte zeigen, dass die Qualität der mathematischen Formalisierung nicht darin besteht, die Realität adäquat abbilden und daraus objektive Schlüsse ziehen zu können. Vielmehr ist sie ein vereinheitlichendes Mittel der Kommunikation, welches notgedrungen die Realitäten der TeilnehmerInnen reduzieren und verändern muss. Wenn man sich dessen bewusst ist, kann Mathematik in der Wissenschaft gewinnbringend eingesetzt werden. Meist beruht ihre Anwendung heute jedoch auf dem Missverständnis der Objektivität.

**Hinweis:** Dieser Artikel wurde verfasst mit der Zielgruppe einer LeserInnenschaft, die mit den konstruktistischen Grundideen vertraut ist und einen fachlichen Schwerpunkt in der Psychologie hat. Um den Artikel zu verstehen, ist es wesentlich, zu wissen, dass der Konstruktivismus davon ausgeht, dass es keine Beobachtung ohne BeobachterIn gibt und damit keinen BeobachterInnen-unabhängigen Zugang zur Realität. Es macht daher Sinn, von individuellen Wirklichkeiten zu sprechen, die sich ähneln oder auch voneinander abweichen können. Eine BeobachterInnen-unabhängige, objektive Wirklichkeit ist jedoch prinzipiell unzugänglich. Der Begriff „Konstruktivismus" betont, dass das Individuum seine Wirklichkeit mit Hilfe seines Wahrnehmungsapparates konstruiert. Der Konstruktivismus erkennt an, dass diese Konstruktionen nicht frei erfolgen können, sondern in Abhängigkeit von und in Interaktion mit einer Umwelt. Andererseits sind die Umwelt und diese Abhängigkeiten nur durch die eigenen Wahrnehmungskonstrukte erfahrbar. Das in der Literaturliste genannte Buch „Wissen und Gewissen" von H. von Förster (1993) liefert in mehreren Aufsätzen eine gute Einführung in den Konstruktivismus, seine Grundlagen aus Systemtheorie und Hirnforschung, und seine Anwendung in verschiedenen Gebieten. Psychologisches Fachwissen ist zum Verständnis dieses Artikels nicht erforderlich.

## 1 Einleitung

„In jeder besonderen Naturlehre (kann) nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden, als darin Mathematik anzutreffen ist", formulierte Kant 1786. Die hiermit verbundene Einstellung zur Rolle der Mathematik in den Wissenschaften ist bis heute aktuell.

Den Ergebnissen der Mathematik wird ein Grad an Objektivität zugesprochen, der von den Aussagen anderer Wissenschaften unerreicht ist. Weitere gängige Aussagen illustrieren das: „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“, „In der Mathematik ist klar, was richtig und was falsch ist“, „Mit mathematischer Genauigkeit/Logik folgt...“. Nach meiner Erfahrung erkennen Menschen die Gültigkeit mathematisch bewiesener Theoreme entweder an, oder sie halten sich selber diesbezüglich für inkompetent. Die extrem seltenen Ausnahmen, die zum Beispiel behaupten, ihnen sei die Quadratur des Kreises gelungen, gelten allgemein als pathologische Fälle.

Wie in vielen anderen Wissenschaften gab und gibt es auch in der Psychologie das Bestreben, sie durch erhöhte Mathematisierung „objektiver“ zu machen. Die Sinnhaftigkeit dieses Unternehmens ist jedoch stark umstritten. Als Mathematiker, der mit der konstruktivistischen Philosophie sympathisiert, interessiert mich in diesem Artikel, welche Rolle die Mathematisierung in den Wissenschaften heute spielt (Abschnitt 2), wie sie zu ihrem Ruf gekommen ist, notwendiges Handwerkszeug „objektiver“ Wissenschaft zu sein (Abschnitt 3), welche Art von Wirklichkeit durch mathematische Modelle in der wissenschaftsgläubigen Gesellschaft hergestellt (statt „abgebildet“) wird (Abschnitt 4), wie es mit dem Anspruch auf „Wahrheit“ in der Mathematik aussieht (Abschnitt 5), und ob und wie mit Mathematik konstruktivistisch umgegangen werden könnte (Abschnitt 6).

Das ist auch vor dem Hintergrund von Interesse, dass Mathematik in einigen für den Konstruktivismus grundlegenden Werken, z.B. bei von Förster, Spencer-Brown und Bateson, eine große Rolle spielt. Systemtheoretische Ansätze nehmen für Psychologie und Soziologie vergleichsweise starken Bezug auf mathematische Modelle, z.B. aus der Chaostheorie. Es gibt also einen mathematischen Zugang zur systemischen Theorie. Doch verträgt sich die mathematische Absolutheit überhaupt mit einer konstruktivistischen Vorstellung von Erkenntnis? Und gibt es auch einen konstruktivistischen Zugang zur Mathematik?

Mein Versuch legt den Akzent auf die Frage, wie über und mit Mathematik kommuniziert wird und wie mit Mathematik Wirklichkeit hergestellt wird - in Abgrenzung zur Vorstellung, dass es vor allem darauf ankäme, mit der „richtigen“ Mathematik die „richtigen“ Theorien zu finden.

## 2 Mathematischen Modelle in den Wissenschaften

Die Rolle der Mathematik ist in den verschiedenen Wissenschaften offenbar unterschiedlich. In der Physik ist die mathematische Begrifflichkeit zur Beschreibung der beobachteten Phänomene dermaßen fundamental, dass es häufig den Anschein hat, hier würde gar nicht mehr unterschieden. Es herrscht also die Vorstellung, es gäbe in der Realität tatsächlich eine „Schwerkraft“, und diese Schwerkraft sei genau das, was die sie beschreibenden mathematischen Formeln ausdrückten. Mit zunehmendem Fortschritt der Beobachtungstechnik entwickelte sich das Interesse der Physik in Bereiche, in denen diese naive Gleichsetzung nicht mehr aufrecht zu erhalten war. So wird das Wort „Modell“ in der Wissenschaft meines Wissens zuerst in der Physik verwendet (siehe Abschnitt 3). Die Vorstellung, dass die Aufgabe der Physik darin bestünde, mathematische formulierbare Naturgesetze zu finden - und dass sie dazu auch in der Lage sei -, ist jedoch weiterhin unangefochten.

In diesem Text verwende ich „Modell“ allgemein für die Zuschreibung mathematischer Konstrukte zu außermathematischen Beobachtungen, da es für mich keinen Sinn macht, von „real vorfindlicher Mathematik“ zu sprechen. Dies steht im Gegensatz zu z.B. Lewin (1936), der zwischen „Modellen“ einerseits und Mathematik als „Repräsentation der Realität“ andererseits unterscheidet.

Über Jahrhunderte hinweg gehörten Physik und Mathematik untrennbar zusammen. Doch auch in anderen Wissenschaften hat mathematische Modellierung mittlerweile große Bedeutung.

Vergleichsweise unumstritten ist die Angemessenheit der Mathematisierung in der Chemie, vor allem aber in der Informatik und den Ingenieurwissenschaften, deren Forschungsgegenstnde zum Teil erst aus der Anwendung des mathematischen Formalismus heraus entstanden sind.

Eine Sonderstellung nehmen die Wirtschaftswissenschaften ein. Ihr Forschungsgebiet ist Geld, d.h. eine Zahlengröße. Daher liegt die Forderung nahe - und ist auch akzeptiert -, wirtschaftliche Theorien hätten mathematisiert zu sein. Doch lässt sich hier eine viel größere Umstrittenheit der konkreten Theorien und in den meisten Fällen eine viel schlechtere Deckung mit empirischen Daten beobachten.

In der Psychologie und der Soziologie, in geringerem Maße auch in der Biologie, ist die Rolle der Mathematisierung umstritten. Mir scheint auch unter den Angehörigen dieser Wissenschaften die Vorstellung verbreitet zu sein, es gäbe eine normative Entwicklungsgeschichte für Wissenschaften in Richtung auf Formalisierung und Prüfbarkeit durch Messung, und die Physik sei diesbezüglich „reif und erwachsen“, während Psychologie und Soziologie sich allenfalls in der Pubertät befänden. Entsprechende Stimmen gibt es z.B. auch in der Ethnologie, Geschichts- und Literaturwissenschaft, wo manchmal aufgrund der dort etablierten Anwendung von anspruchsvoller Statistik bereits die Soziologie als Vorbild angesehen wird.

Die Gleichsetzung zwischen Formalisierungsgrad und Reife der Wissenschaft liegt der häufig verwendeten Unterteilung der Wissenschaften in „harte“ und „weiche“ zugrunde. „Hart“ wird assoziert mit „Messbarkeit“ und „Prüfbarkeit“, also Mathematisierung und Objektivität. Es ist als Zuschreibung - „unumstößlich“ - für wissenschaftliche Ergebnisse positiv konnotiert. Ich vermute, dass auch LiteraturwissenschaftlerInnen ihre Resultate, ob mathematisch formuliert oder nicht, lieber als „hart“ bezeichnen würden als als „weich“. Die Assoziation „männlich“ liegt nahe; von „weichen“ weiblichen Qualitäten wird in der Wissenschaft anscheinend wenig gehalten.

Nach meiner Erfahrung als statistischer Berater unterscheiden sich die „harte“ und die „weiche“ Kultur stark im Umgang mit mathematischen Modellen:

Für „harte“ WissenschaftlerInnen ist das Bestreben charakteristisch, rein mathematisch zu diskutieren. Die Angemessenheit ihrer konkreten Modellierung soll möglichst gar kein Thema sein, nicht hinterfragt werden. Kommt das Gespräch doch auf dieses Thema, wird es nach Möglichkeit unter Verweis darauf unterbunden, dass das Modell ja nicht völlig richtig sein müsse, sondern nur approximativ, und dass es auf jeden Fall „pragmatisch“ sei. Es gibt keine Berührungsängste mit Mathematik - schon aufgrund der starken Betonung in der Ausbildung. Es gibt viele mathematische Rechnungen, die PhysikerInnen und IngenieurInnen schneller und besser ausführen können als MathematikerInnen. Jedoch können sie selten begründen, *warum* es so funktioniert, wie sie es machen.

„Weiche“ WissenschaftlerInnen beginnen das Beratungsgespräch dagegen typischerweise so: „Ich habe ein mathematisches Problem, das für Sie sicher ganz einfach ist“ (was dann nur in den seltensten Fällen zutrifft). Viele von ihnen schrecken vor mathematischen

Formeln zurück, und wenn sie den Formalismus in Fachartikeln ihrer eigenen Wissenachft nicht verstehen, führen sie das auf eigene Unwissenheit zurück anstatt auf unverständliche Darstellung (während ich in den mir vorgelegten Fällen meist auf letzteres plädiert habe). Offenbar gestehen sie mathematischen Argumentationen das Recht zu, mysteriös zu sein und trotzdem geglaubt zu werden. Der Umgang der „Weichen“ mit der Modellierung verdient in gewisser Weise das Attribut „hart“: Sie sind viel eher daran interessiert, die Anpassung ihrer Modelle auf ihr Forschungsthema kritisch zu analysieren, die Modelle zu überarbeiten oder zu revidieren, sie also standfester zu machen, als die „Harten“. Viele „weiche“ WissenschaftlerInnen äußern sich grundsätzlich misstrauisch über die Anwendung von Mathematik in ihrer Wissenschaft - auch die, die die statistischen Beratung in Anspruch nehmen.

Die AnwenderInnen von Mathematik in den Sozialwissenschaften sehen sich häufig dem Vorwurf von naturwissenschaftlicher Seite ausgesetzt, sie würden die Mathematik „falsch“ verstehen und verwenden. Dass jedoch der Spieß umgedreht und die Objektivität des mathematischen Ansatzes von „weicher“ Seite in Frage gestellt wird, sehen die „Harten“ auch nicht gerne. Die Behauptung, naturwissenschaftliche Erkenntnis sei sozial konstruiert, findet dort jedenfalls wenig AnhängerInnen.

Die positive Bewertung der Mathematisierung beruht auf der Vorstellung, die Anwendung mathematischer Modelle in den „harten“ Wissenschaften sei eine Erfolgsgeschichte. Das ist insofern nachvollziehbar, als dass die „Harten“ offenbar die Welt in starkem Maße verändert haben. Man kann sich darüber streiten, ob die Veränderungen in Form von technischem Fortschritt durchweg positiv zu bewerten sind; VertreterInnen der „Erfolgsgeschichte“-Theorie mögen diesen Streit jedoch nicht. Meist wird versucht, ihn mit Argumenten der Art abzuwürgen, „dann könnten wir doch gleich wieder auf die Bäume zurück“.

Die technischen Errungenschaften zeigen allerdings nicht die Überlegenheit der mathematisch-naturwissenschaftlichen Methode in Bezug auf die objektive Erfassung der Realität, sondern ihr *konstruktives* Potenzial. Das Funktionieren eines Flugzeugs beruht z.B. darauf, dass (nach längerem Herumprobieren) künstlich eine Situation hergestellt wurde, die den Ergebnissen der mathematischen-physikalischen Berechnungen einigermaßen nahe kam, nicht jedoch darauf, dass man in der Natur etwas gefunden hätte, für das die Berechnungen gestimmt hätten. Die „harten“ Wissenschaften handeln von manipulierbarer, toter Materie. Sie bietet die Möglichkeit, Mathematik wahr zu machen - was freilich nicht immer gelingt, wie technische Unglücke immer wieder zeigen. „Die ‘hard sciences’ sind erfolgreich, weil sie sich mit den ‘soft problems’ beschäftigen; die ‘soft sciences’ haben zu kämpfen, denn sie haben es mit den ‘hard problems’ zu tun,“ schreibt Heinz von Förster (1993), S. 337.

Recht populär ist die Vorstellung, einige Themen würden sich zur Mathematisierung eignen - in Physik, Chemie, Ingenieurwissenschaften - andere jedoch nicht, nämlich die Themen des Lebens. Für mich liegt der Unterschied nicht darin, dass die unterschiedlichen Forschungsobjekte unterschiedlich mathematisch wären, sondern sie sind der Mathematik der BeobachterIn mehr oder weniger leicht zu unterwerfen. Es wird sich zeigen, dass die Physik bezüglich der Fähigkeit, Realität als Mathematik abzubilden, nicht weniger problematisch ist als die „weichen“ Lebenswissenschaften.

Mathematik wird in der Wissenschaft noch anders eingesetzt als als Objektivierungsmittel, nämlich zur Diskriminierung. In vielen Studiengängen wird von den Mathematik-

Veranstaltungen erwartet, unliebsame Studierende herauszufiltern. Mathematik gilt als schwer, benötigt Drill, und wegen der klaren wahr/falsch-Kodierung eignen sich Mathematikleistungen besser zur Messung als die Leistungen in anderen Fächern. In vielen wissenschaftlichen Veröffentlichungen sind die mathematischen Teile unvollständig und unverständlich, abgesehen davon, dass sie an sich schon viele LeserInnen schrecken. Für die AutorInnen ist das sehr sinnvoll: Mathematik wird normalerweise geglaubt, gerade wenn sie nicht verstanden wird. Angehörige der Sozial- und Lebenswissenschaften sollten nicht glauben, dass das Stilmittel des komplexen, unverständlichen Formalismus vor der naturwissenschaftlichen oder gar mathematischen LeserIn bzw. HörerIn keine Chance hätte. Insbesondere auf Tagungen werden viele schwere Formeln in kurzer Zeit häufig als eine Art Kompetenzausweis benutzt. Dass die Inhalte kritisch diskutiert werden, ist dann eher ein Ausnahmefall.

Der nötige Aufwand, sich in die komlexe Mathematik einzuarbeiten, wirkt bestätigend für die Theorie der „Erfolgsgeschichte“: Niemand möchte Jahre seines Lebens in das Erlernen einer nutzlosen Fertigkeit gesteckt haben. Wer sich mehr als oberflächlich mit Mathematik beschäftigt, gerät schon aus Gründen der Selbstrechtfertigung leicht in die Position einer VerfechterIn der Mathematisierung.

# 3 Wie die Modelle wurden, was sind sind

Eine heute weitverbreitete Ansicht besagt, dass die Mathematisierung der Wissenschaften und insbesondere der Physik zu Ergebnissen führt, deren Objektivität sich durch bessere Übereinstimmung mit den Erfahrungen belegen lässt. Ein Blick in die Geschichte zeigt, dass die Mathematisierung ihre eigenen Erfahrungen schaffte, während sie mit den vorhandenen Erfahrungen zu Beginn der modernen Physik weniger gut zusammenpasste.

Die Grundlagen der heutigen mathematisierten Physik wurden gelegt von Galilei. Über ihn kam die Geschichte in Umlauf, er hätte sein erstes Fallgesetz öffentlich mit Experimenten vom schiefen Turm von Pisa belegt (Koyré (1998), bei dem die Geschichte der Fallgesetze mit größerer Genauigkeit nachzulesen ist als hier, zitiert auf S. 123 ff. AutorInnen, die das behaupten). Mulser (1996) karikiert die Szene folgendermaßen: „Der junge Galilei stieg eines Tages auf den schiefen Turm von Pisa, bepackt mit allerlei Gegenständen, die er samt und sonders mit sichtlichem Vergnügen in die Tiefe fallen ließ: Eine Kugel aus Blei, ein altes Fernrohr, seine Brille, einen Kochlöffel, einen Lampion aus Papier, Bettfedern, Blütenpollen und einen Vogel. Dann rannte er nach unten und stellte fest: Kugel, Kochlöffel, Brille und Fernrohr lagen im Gras, und der Lampion ging vor seinen Augen nieder, aber einige Bettfedern tänzelten immer noch in der Luft, die Pollen waren eine Beute des Windes, und den Vogel gelüstete es nach Höhe und Weite, er entschwand in den Lüften. Galilei fasste seine Versuchsergebnisse zusammen und verkündete: ≪Alle Körper fallen gleich schnell.≫“

Die Beschreibungen von Galileis BiographInnen (Koyré (1998), S. 123 ff.) klingen nüchterner, doch auch die von ihnen berichteten Experimente funktionieren nicht. Die Szene auf dem Turm ist historisch unhaltbar. Das Fallgesetz beruht offenbar nicht auf Erfahrung, sondern auf einem mathematischen Gedankenexperiment. Die Herstellung experimenteller Bedingungen, unter denen das Gesetz annähernd gezeigt werden kann - insbesondere muss der Luftwiderstand ausgeschaltet werden - gelang erst Galileis NachfolgerInnen.

Auch weitere Theorien Galileis widersprachen offensichtlichen Erfahrungen (siehe z.B. Feyerabend (1995), S. 89 ff.). Galilei berichtete ausführlich über seine Experimente, die aus heutiger Sicht stark unter den mangelhaften technischen Gegebenheiten litten. Er nannte selten konkrete Zahlen, und wenn doch, stimmen sie mit den heute anerkannten Werten nicht überein (Koyré (1998), S. 151-175).

Galilei selbst war sich dieser Probleme wohl bewusst. 1637 schreibt er: „Zeigt die Erfahrung nunmehr, dass solche Eigenschaften, wie wir sie abgeleitet, im freien Fall des Naturkörpers ihre Bestätigung finden, so können wir ohne Gefahr des Irrtums behaupten, dass die konkrete Fallbewegung mit derjenigen, die wir definiert und vorausgesetzt haben, identisch ist: ist dies nicht der Fall, so verlieren doch unsere Beweise, da sie einzig und allein für unsere Voraussetzung gelten wollten, nichts von ihrer Kraft und Schlüssigkeit." (Zitiert nach Ortlieb (2000) S. 17, an dem ich mich im gesamten Abschnitt orientiert habe.)

Es ist offenbar nicht Galileis Projekt, vorhandene Erscheinungen korrekt als mathematischen Formalismus wiederzugeben. Stattdessen ist seine Überzeugung, dass „das Buch der Natur in geometrischen Zeichen geschrieben ist". Er beginnt, eine idealisierte, mathematische Physik zu entwickeln, der das Experiment nachgeordnet ist: Als gezielter Versuch, die Bedingungen herzustellen, in denen die theoretischen Vorhersagen stimmen. Seine Physik ist offenbar konstruktiv: Sie stellt Beobachtungen her, die es ohne sie nicht gegeben hätte. Kant (1787) fasst die Methode so zusammen: „Die sichere Wissenschaft lässt sich von der Natur nicht am Leitband gängeln, sondern nötigt die Natur, auf ihre Fragen zu antworten." (Ortlieb (2000), S. 19-20)

Kant unterscheidet die „menschlichen Vernunft", die ihren Bedürfnissen gemäß nach Naturgesetzen sucht, von der Natur an sich, die „ungeordnete Erfahrungen" hervorbrächte und „genötigt" werden müsse, auf unsere Fragen zu antworten. Die mathematische Physik ist bis dahin zur etablierten Weltsicht geworden. Die Geschichte des Turmversuchs ist im Umlauf, die Empirie des Experiments ist zur maßgeblichen Empirie geworden. Dabei setzen die Experimente die mathematische Theorie voraus, die zu beweisen ihnen heute zugeschrieben wird.

Zu diesem Zeitpunkt gibt es die Vorstellung von „Modellen" nicht. Mathematische Aussagen werden als wahre Aussagen über die (experimentell „befragte") Natur angesehen. Die Mathematik entwickelt sich entlang der physikalischen Theorien. Diese Eintracht wird gestört durch die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrien beginnend mit Gauß und unabhängig von ihm Bolyai und Lobatschewskij in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Sie beweisen, dass mathematische Theorien möglich sind, die miteinander nicht konsistente Erfahrungswelten beschreiben oder gar erfahrungsfremd sind.

Hertz, der 1894 vermutlich als erster den Begriff „Modell" im Zusammenhang mit der Verbindung von mathematischer Form und Erfahrungswelt verwendet, unterscheidet explizit zwischen „Gegenständen" und den ihnen zugeordneten „mathematischen Symbolen". Wie das Diagramm 1 (nach Ortlieb (2000), S.31) zeigt, sollen die „denknotwendigen Folgen" in der mathematischen Ebene Schlüsse über die Naturebene ermöglichen. Damit die Parallelsetzung korrekt funktioniert, fordert Hertz von den Modellen „Zulässigkeit, Richtigkeit und Zweckmäßigkeit" (Ortlieb (2000), S. 31). Diese Darstellung ist noch heute weit verbreitet, um die Funktionsweise der mathematischen Modellierung zu erläutern. Sie ist nicht konstruktivistisch; „Zulässigkeit" und „Richtigkeit" werden als möglich und beurteilbar behandelt. Die Entwicklung gegenüber Kants Auffassung besteht darin, dass

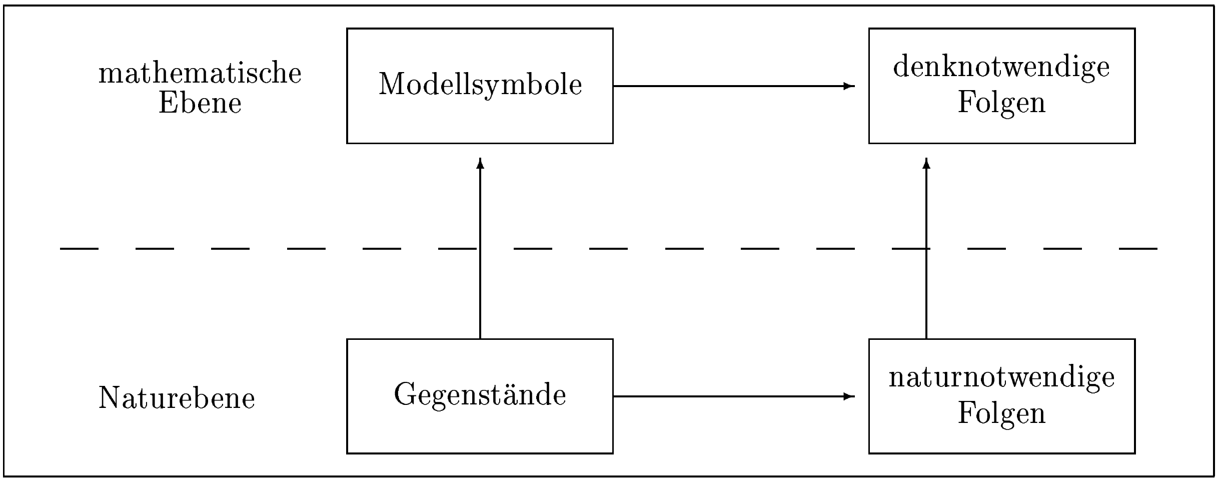


Abbildung 1: Hertz'sches Konzept der Modellierung

es nach Hertz' Bild möglich ist, sich für die Vorgänge zwischen den Ebenen des Diagrammes - den Vorgang der Modellierung - zu interessieren.

Die Mathematik ist am Ende des 19. Jahrhunderts in einen Grundlagenstreit geraten über die Anbindung der mathematischen Strukturen an die Erfahrung und Anschauung. Eine der Parteien um den Niederländer Brouwer nannte sich interessanterweise „Konstruktivisten“. Sie haben mit dem erkenntnistheoretischen Konstruktivismus jedoch kaum etwas zu tun und spielen im Zusammenhang mit meinem Thema keine nennenswerte Rolle, zumal sich ihre Ansichten nicht durchsetzen konnten.

Bis heute einflussreicher ist Hilbert, der 1900 seine Auffassung von Mathematik vorstellt. Hilbert fordert eine strikte Trennung des mathematischen Folgerns von der Erfahrung. Die Mathematik habe auf Axiomen zu beruhen, die widerspruchsfrei und (nach Möglichkeit) unabhängig zu sein haben. Auf der Basis solcher Axiome kann der menschliche Geist klare, konsistente Mathematik entwickeln; jedoch kommt man mit unterschiedlichen Axiomen zu unterschiedlichen Theorien. Mathematik kann durch die Wahl geeigneter Axiome auf beliebige wissenschaftliche Gebiete angewendet werden - das kann nach den Hertz'schen Kriterien beurteilt werden -, und innerhalb der Axiomatik kann, so glaubt Hilbert, prinzipiell jedes Problem gelöst werden. Dieser Glaube wird zwar später durch die Arbeiten Gödels widerlegt, doch wird mathematische Forschung heute weiterhin großteils im Geiste des Hilbert'schen Programms betrieben, denn die grundsätzlichen Grenzen, die formalen Systemen gesetzt sind, werden der mathematische SpezialistIn in den seltensten Fällen gegenwärtig.

Hilberts Programm ist als „Anwendungsimperialismus“ bezeichnet worden. Gerade die Trennung von der (geometrischen Raum-) Erfahrung macht die Mathematik flexibel genug, in fast alle Wissenschaften einzudringen. Das ist ökonomisch und politisch gewollt, denn die Erfolge der mathematisierten Physik bedeuten Macht und Herrschaft. Vor allem die technischen Errungenschaften, darunter die militärischen, garantieren den naturwissenschaftlich orientierten EuropäerInnen und AmerikanerInnen ihre Vormachtstellung in der Welt. Die technischen Erfolge sind allesamt konstruktiver Natur: Sie beruhen auf der Herstellung der durch die Theorie vorentworfenen Räume frei von Störeinflüssen, nicht jedoch auf Erklärung von Erfahrungsdaten.

Mit diesem Abschnitt wollte ich ein Bild vom Drängen der Mathematik in die Wissenschaften zeigen, von der Fremdheit des mathematischen Ansatzes gegenüber der „nicht mathematisch domestizierten“ Erfahrung, und ein Bild davon, wie die formalisierte Wissenschaft Erfahrungen herstellen kann, die sie bestätigen - so lange man sich im streng kontrollierbaren Raum des Experimentes befindet.

# 4 Wirklichkeit herstellen durch Mathematik

Die wesentliche Qualität der Mathematik ist Vereinheitlichung. Wird ein Sachverhalt mathematisch formalisiert, so ist er in einer Sprache ausgedrückt, in der, abgesehen von gut versteckten Grundlagenproblemen, absolute Verständigung möglich sein soll. Das liegt daran, dass die mathematischen Strukturen beanspruchen, nichts zu sein, als das, was in den Axiomen festgelegt ist. Mathematische Kommunikation enthält also außer den eigenen Regeln keine Kultur und keine individuellen Hintergründe. Mathematische Formeln sind - als Idealvorstellung - nicht konnotiert, nicht „eingefärbt“ durch individuelle Vorstellungen.

In dieser Funktion ist die Mathematik nicht in der Lage, komplexe individuelle Wirklichkeiten wiederzugeben. Die Welt der Mathematik ist karg, doch aufgrund ihrer Ausrichtung auf Verständigung und Einigkeit ist sie kulturell ungeheuer machtvoll. Diese Formulierungen mögen angesichts der Beobachtung, dass das Nicht-Verstehen im Umgang mit mathematischen Modellen allgegenwärtig ist, etwas seltsam anmuten. Der Ruf der Mathematik kann wunderbar ausgenutzt werden, um mit unvollständig erklärten Formalismen Eindruck zu schinden, doch im obigen Sinne sollte ein Diskurs nicht „mathematisch“ genannt werden, wenn keine Verständigung stattfindet.

Mathematik muss persönliche Wirklichkeiten angleichen, um zu funktionieren. Soll eine Wirklichkeit mathematisch modelliert werden, so müssen die Aspekte dieser Wirklichkeit in ein mathematisches Format gebracht werden, um an das Modell angebunden zu werden. Mathematisierung setzt Quantifizierung, also Zählung und Messung, zumindest aber präzise Klassifikation voraus. Das wird von der Modellierung erzwungen, unabhängig davon, ob das Modell letztlich als valide angesehen wird oder nicht.

Die Physik entwickelte sich durch Galilei und seine Nachfolger hin zur Betrachtung von in Experimenten isolierbaren Phänomenen. „Störfaktoren“ wie das Klima gerieten außerhalb des Blickfeldes der Physik, jedenfalls so lange kein Ansatz vorhanden war, sie ebenfalls auf isolierbare Aspekte zu reduzieren. Der Erfolg der Physik rührt von der Möglichkeit her, Experimente im Alltag unterzubringen, z.B. in Form von weitgehend isolierten Motoren, Kesseln usw. Außerdem schuf sich die moderene Physik diverse präzise Messinstrumente.

Gezielte Experimente unter Ausschaltung von Störfaktoren gehören auch in anderen Wissenschaften, z.B. der Psychologie, zu den mathematisch inspirierten Konstruktionen. Noch wesentlicher scheint mir die Einführung von Mess-Skalen zu sein. Um Phänomene wie Kreativität quantitativ behandeln zu können, müssen sie irgendwie in Zahlen gefasst werden. Diese Zahlen gewinnen ein Eigenleben, wie sich an vielen Beispielen zeigen lässt: Schulwahl-Empfehlungen für Kinder anhand von Intelligenztests, Beurteilung der Unterrichtsqualität in Schulfächern anhand von genormten Vergleichsklausuren, Beurteilung der Gesundheitsschädlichkeit von Industrieanlagen anhand von Grenzwerten für bestimmte Chemikalien, Erfolg von Fernsehsendungen durch Einschaltqouten, Vergabe wissenschaftlicher Stellen nach Länge der Publikationsliste. Alle diese Messungen lenken den Blick auf sich, und sie lenken den Blick weg von anderen Dingen wie zum Beispiel der Zufriedenheit der SchülerInnen, oder dem Potenzial einer Fernsehsendung, interessante Diskussionen auszulösen. Das gilt jedenfalls so lange, bis auch für diese Aspekte eine geeignete Maßzahl zur Verfügung steht.

Die Kernfrage zur Prüfung der Konstruktion von Realität durch Messung scheint mir zu sein: *Was tut die Messung, außer zu messen?*

Eine Sonderrolle spielt das Geld. Geld ist keine Folge mathematischer Modellierung, und Geldwerte werden ohne Weiteres als „real bedeutsam“ akzeptiert, worüber bei Intelligenzquotienten u.a. immerhin noch gestritten werden kann. Geld kann aber dazu verwendet werden, andere quantitative Größen in diesem Sinne real zu machen: Einschaltquoten rechnen sich mittlerweile direkt in erhöhte Werbeeinnahmen um, gute Schulnoten bzw. eine lange Publikationsliste sind Schmiermittel bei Bewerbungen, für Markenartikel zahlt es sich aus, Verbrauchertest-Rankings zu gewinnen. Die Volkswirtschaftslehre versucht, dem Faktor Umwelt Rechnung (sic!) zu tragen, indem sie den volkswirtschaftlichen Nutzen klarer Flüsse mit Geldsummen veranschlagt. Überhaupt scheint es kaum eine bessere Taktik für die AnwältInnen vernächlässigter Aspekte der Wirklichkeit zu geben, als dafür scheinbar objektive Messgrößen zu entwickeln: Lebensqualität-Indizes, Kriminalitätsopfer-Steigerungsraten usw.; die AnhängerInnen psychologischer Therapieformen müssen Ideen entwickeln, deren Wirksamkeit wissenschaftlich nachzuweisen.

Die Quantifizierung ist aus den Wissenschaften heraus weit in den Alltag gedrungen. Zu allen möglichen Themen werden „objektive“, d.h. aus klar definierten Messgrößen erstellte Ranglisten gefordert und geliefert. In allen Fällen sorgt das für eine Reduktion des Blickfeldes. Ich will damit nicht die Verwendung von Messungen grundsätzlich diskreditieren; Reduktion kann eine Qualität sein (und dann zeigt mathematische Modellierung ihre Stärken). Es geht einfach darum, die Veränderung der Wirklichkeit zu sehen, die im Gefolge der Quantifizierung passiert.

All diese Effekte sind unabhängig von der inhaltlichen Ausrichtung der Theorie, die mit einem mathematischen Modell untermauert werden soll. Doch auch der Inhalt hat Folgen, nämlich die Konzentration der Beobachtung auf die modellierten Mechanismen unter Ausblendung der anderen. Das populärste volkswirtschaftliche Modell zeigt unter einigen restriktiven Voraussetzungen (u.a. vollständige Informiertheit aller AkteurInnen), dass Angebot und Nachfrage im freien Markt zu einem Gleichgewicht tendieren. Also wird gefolgert, dass Märkte, die sich offenbar nicht im Gleichgewicht befinden, wie z.B. der Arbeitsmarkt, unter marktfremden Mechanismen wie z.B. staatlicher Regulierung leiden. Es wird also im Rahmen des Modells argumentiert, anstatt dass das Modell sich durch die Schieflage in Frage stellen ließe. Dabei verletzt der Arbeitsmarkt eine wesentliche Voraussetzung: Er ist nicht isoliert von anderen Märkten; wenn Arbeit teurer wird, kann sich entgegen dem Standardmodell trotzdem das Angebot an Arbeitsplätzen erhöhen, wenn die Beschäftigten mehr Geld ausgeben. Dieses Argument gegen das neoklassische Marktmodell ist einigermaßen bekannt, weil es dafür ein alternatives Modell gibt. Doch trotz der offensichtlichen Verletzung der Voraussetzungen wird mit Hilfe des Modells für den Markt im Gleichgewicht Politik gemacht; es wird einem weniger regulierten Marktmechanismus das Wort geredet. Das erinnert an Galilei: Das Modell wird benutzt, um Faktoren auszuschalten, die die Modellvorhersage stören. Das „Experiment“ wird in den Alltag getragen.

Können mathematische Modelle an der Wirklichkeit scheitern? Können sie „falsifiziert“ werden? (Dass mathematische Modelle nicht durch Daten *verifiziert* werden können, scheint mir so selbstverständlich zu sein, dass ich es hier nicht diskutiere. Leider wird auch diese Erkenntnis im praktische Umgang mit den Modellen oft missachtet.)

Offenbar kommt es vor, dass Modelle aus mangelnder Übereinstimmung mit der Realität fallengelassen werden. Ich glaube jedoch, dass hier nicht die Realität alleine am Werke ist, sondern eher Machtverschiebungen in Wissenschaft oder Politik. Die VertreterInnen mathematischer Modelle verfügen über zwei ausgezeichnete Werkzeuge, eine Falsifikation abzuwenden oder ihr zuvorzukommen. Sie beruhen beide auf der für mathematische Modelle notwendigen Reduktion. Die erste Methode wurde eben am neoklassischen Marktmodell und früher am Turm von Pisa demonstriert: Man wirft der Realität vor, den Modellablauf zu stören. Nichtübereinstimmung wird nicht gegen das Modell, sondern gegen die Realität verwendet. Die zweite Methode schafft Realität insofern, als dass sie die weitere Mathematisierung fördert. Die ModelliererIn kann sich darauf zurückziehen, dass die Realität nicht vollständig getroffen ist und weitere Einflüsse in das Modell aufgenommen werden müssen. Dahinter steckt die Vorstellung von der „Approximation der Realität“; das Modell wird als Schritt auf dem Weg zu einer vollständig gültigen Formalisierung gesehen. Diese Verteidigung funktioniert immer, da die Reduktion im Wesen der Modellierung liegt, die Mathematik aber andererseits immer verkompliziert werden kann. Unter Umständen, bzw. ab einem gewissen Komplexitätsgrad notwendig, kommt man dann auf rechnerisch oder analytisch nicht mehr handhabbare Modelle, was dann aber eine Rechtfertigung für das unvollkommene Modell wäre. In der Fachliteratur verschiedenster Wissenschaften wird gebetsmühlenhaft in den Ausblicken angeführt, welche Effekte „eigentlich noch berücksichtigt werden müssten“. Das reicht als Ausweis der Einsicht in die eigene Beschränkung aus. Es gibt in den meisten Wissenschaften „Modellierungstheorien“, die sich wesentlich mit Routinen für die Einbindung noch nicht eingegliederter Aspekte beschäftigen. Empirische Falsifikation konkreter Modelle kann solche Theorien nur bestätigen.

In beiden Fällen kann die Figur des „Mehr Desselben“ angewendet werden: Mehr Ausschluss von Störeinflüssen, oder mehr Mathematik.

# 5 Mathematik und Wahrheit

Die mathematischen Sätze scheinen mir von den Behauptungen, denen von Menschen „absolute Wahrheit“ zugesprochen wird, die unumstrittensten zu sein. Seit ich mich mit Mathematik beschäftige, frage ich mich, wodurch dieser Anspruch gerechtfertigt ist. Ich habe viele Erklärungen gelesen, wo von „Notwendigkeiten des Denkens“ die Rede ist, und bin letztlich nicht befriedigt, denn Notwendigkeit wird konstatiert, aber für mich nicht überzeugend erklärt. Andererseits bin ich in der Lage, mathematische Beweise nachzuvollziehen und behandle sie in meinem alltäglichen Denken selber als „denknotwendig“. Nach meiner Erfahrung ist auf diesem Gebiet immer Einigkeit zu erzielen, sobald die Beteiligten das ernsthaft versuchen. Doch ich traue meiner Erfahrung nicht über den Weg. Ich bin mathematisch sozialisiert, und dass ich mathematische Wahrheiten anerkenne, bedeutet zunächst nichts, als dass *ich* sie eben anerkenne.

Zunächst möchte ich die Aufmerksamkeit darauf lenken, dass Wahrheit mathematischer Sätze einerseits und aus mathematischen Modellen abgeleitete Wahrheit über die

Wirklichkeit andererseits zwei ganz unterschiedliche Konzepte sind. Wahrheit innerhalb der Mathematik handelt von mathematischen Strukturen, die im Idealfall klar definiert sind, und nichts sind als das, als was sie definiert sind. Wahrheit von aus mathematischen Modellen gefolgerten Aussagen über die Wirklichkeit kann nicht mit mathematischen Methoden bewiesen werden. Fallende Gegenstände oder psychische Befindlichkeiten sind nie genau so, wie mathematische Strukturen definiert sind. Eine wesentliche Motivation zur Anwendung mathematischer Modelle in der Wissenschaft ist der Wunsch nach Absolutheit, nach Objektivität. Dieser Wunsch rührt von der scheinbaren Absolutheit innerhalb der Mathematik her, doch im Bezug auf die nichtformale Welt kann mathematische Modellierung ihn aufgrund ihres Wesens nicht erfüllen.

Mit mathematischen Mitteln kann nicht bewiesen werden, dass eine bestimmte Aussage über die Realität wahr ist, die ansonsten umstritten wäre, weil Mathematik nur in Strukturen lebt, in denen es keine Umstrittenheit mehr geben darf. Daher ist die Anpassung eines mathematischen Modells an eine Wirklichkeit immer BeobachterInnen-abhängig, und jede BeobachterIn muss ihre Beobachtungen ändern und reduzieren, um sie Mathematik-kompatibel zu machen. Der übliche Diskurs über mathematische Modelle, der bestimmte Modelle für realitätsfern erklärt und nach realitätsnäheren, präziseren, komplexeren Modellen sucht, geht am Wesen mathematischer Modelle vorbei, denn deren Qualität ist nicht die Fähigkeit, Wirklichkeiten zu erfassen, sondern die Vereinheitlichung von Denkmustern. Wenn sich die Beteiligten dessen nicht bewusst sind, laufen sie Gefahr, ihre Wirklichkeiten zugunsten der mathematisch formulierten einzuebnen. Menschen kommen dazu, Märkte als nichts anderes zu sehen als zum Gleichgewicht strebende Systeme von Angebot und Nachfrage. Eine mathematische Betrachtungsweise kann also die „Wahrheit einer BeobachterIn“ werden, doch das impliziert keinerlei Notwendigkeit für andere.

Eine gute Illustration für das Einebnen von Denkstrukturen sind *definitorische* Argumente, die in der Wissenschaft und anderswo vorkommen. Dafür zwei Beispiele aus Diskussionen, die ich erlebt habe. Es wurde behauptet: „Das Prinzip der Räterepublik ist undemokratisch.“ Anderswo: „Gut ausgebildete MusikerInnen kommen immer von der Hochschule“. Zunächst ist in diesen Behauptungen keinerlei Mathematik zu erkennen, doch die Suche nach Begründungen für die Behauptungen brachte folgende Argumente zutage: „Ein System kann sich nur dann Demokratie nennen, wenn es ein allgemein und gleich gewähltes Parlament gibt.“ Und: „Nur eine akademische Ausbildung kann eine «gute» Ausbildung genannt werden.“ (Eine verstecktere Variante würde lauten: „Wie man in einem Artikel der anerkannten ExpertIn ... nachlesen kann, kann ein System sich nur dann... “)

Bei diese Ausgangslage sind die Behauptungen triviale logische Folgerungen. Nur sagen sie weder etwas über Räterepubliken, noch über Ausbildungsqualität von MusikerInnen, sondern nur etwas über den Begriffsapparat der RednerIn aus. Schlussfolgerungen wie diese sind mühelos formalisierbar. Das liegt daran, dass die Begriffe bis auf den Text der Definition (bzw. ihren logisch verwerteten Teil) von allen Assoziationen, Problemen, individuellen Nebenklängen gereinigt sein müssen. Wirklichkeits-Passung mathematischer Modelle ist durch Bereinigung der Wirklichkeit zu erreichen, nicht anders.

Zur Wahrheit *innerhalb* der Mathematik zitiere ich G. Spencer-Brown aus der „Vorstellung der internationalen Ausgabe“ der „Gesetze der Form“ (Spencer-Brown (1997), S. xi). Spencer-Brown erklärt dort, dass Wissen nur durch „Befehl und Betrachtung“

mitgeteilt werden kann. Wissen Sie mit vollständiger Gewissheit, ob es unendlich viele Primzahlen gibt? Folgendermaßen können Sie die Antwort erfahren - „ohne dass ich sie Ihnen je gesagt habe“, verspricht Spencer-Brown:

**„Befehl 1.** Nimm an, die Primzahlen kommen zu einem Ende.

**Betrachtung 1.** Wenn das so ist, gibt es offenbar eine größte Primzahl, nenne sie $P$.

**Befehl 2.** Konstruiere eine Zahl, indem du alle Primzahlen miteinander multiplizierst, 2 mal 3 mal 5 mal ... mal $P$.

**Betrachtung 2.** Nenne diese Zahl $N$. $N$ lässt sich offenbar exakt durch jede Primzahl teilen.

**Befehl 3.** Addiere 1 zu $N$.

**Betrachtung 3.** Diese neue Zahl, $N + 1$, lässt sich ganz klar nicht durch irgendeine der Primzahlen bis hin und einschließlich $P$ exakt teilen, da jedesmal der Rest 1 übrigbleibt.

Welche endliche Menge von Primzahlen auch immer wir somit wählen, können wir daraus immer eine weitere Primzahl erzeugen, die nicht der Menge angehört.

Die Primzahlen setzen sich also offenbar für immer fort.“

Sind Sie sich nun sicher? Dann sind wir zu Einigkeit gekommen. Und Mathematik findet durch Einigkeit statt, durch das sichere Wissen, dass alle Kommunikationsparteien von der Wahrheit desselben Gedankens überzeugt sind. Und dennoch kann jeder den Gedanken nur selber konstruieren. Die Mathematik findet nicht außerhalb von mir statt, sondern ich muss sie, damit sie verstandene Mathematik für mich wird, selber konstruieren. Konstruktionen können angewiesen werden, sie mögen zwingende Konsequenzen haben, doch konstruieren muss ich selbst. Der Anspruch der Mathematik ist es, die zwingenden Konsequenzen der Konstruktionen zu beschreiben.

Interessanterweise hält Spencer-Brown seinen Anspruch nicht ein. Betrachten Sie den letzten Satz der letzten Betrachtung: Er hat Ihnen *doch* selbst gesagt, was Ihre Antwort sein soll. Sein Vertrauen, dass Sie selber ohne dieses Fazit auch dahin gekommen wären, ist anscheinend weniger unendlich als die Primzahlen.

Was passiert, wenn sich jemand nicht in der Lage sieht, den Befehlen zu folgen, oder anderes betrachtet, als Spencer-Brown vorgibt?

An unserem Fachbereich tauchte über lange Jahre ein alter Mann mit Flugblättern auf, in denen er verkündete, dass die Kreiszahl $\pi$ rational mit Wert 3.1428 ist. Dass es über den Wert von $\pi$ mehrere richtige, BeobachterInnen-abhängige Sichtweisen geben könne, passte weder in sein Weltbild, noch in das Weltbild vieler Mitglieder des mathematischen Fachbereichs. Daher gaben sich sowohl der alte Mann einerseits, als auch einige ProfessorInnen und StudentInnen andererseits gewisse Mühe, einander zu überzeugen. Die Beweise des alten Mannes waren jedoch als lückenhaft und unvollständig, letztlich also unverständlich und unmathematisch verrufen. Andererseits widersetzte sich der alte Mann seinerseits sämtlichen Demonstrationen, unter anderem auch Computerapproximationen der Kreisfläche durch Vielecke, über deren Flächenberechnung man ihm als gelernten Ingenieur Wissen unterstellte.

Die Einschätzung vieler MathematikerInnen über die „Gesetze der Form“ ist sehr ähnlich. Spencer-Browns Werk wird vielerorts für unverständlich gehalten und ignoriert. Die Tatsache, dass Spencer-Brown in den in der zitierten Ausgabe integrierten Begleittexten viele gute Gründe angibt, warum er schwer zu verstehen ist, und die vielen guten Gedanken, die LeserInnen seinem Werk entnehmen können, ohne die Mathematik zu verstehen, ändern nichts daran, dass es den meisten dieser LeserInnen, mich inklusive, nicht gelungen ist, dem Brown'schen System von Befehl und Betrachtung bis zum Ende zu folgen.

Auf dieser Grundlage ist es für mich, der ich die „Gesetze“ nicht vollständig verstehe, nicht möglich, Spencer-Browns Mathematik als „wahr“, des zitierten alten Mannes Mathematik aber als „Spinnerei“ zu qualifizieren.

Wir können niemandem vorschreiben, aus den oben gegebenen Befehlen die klare Einsicht zu ziehen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wir sehen es *selber* - oder nicht.

Mehrfach habe ich gelesen, dass die Mathematik ein festes Regelsystem sei, und daher Mathematik-intern durchaus festgelegt sei, was wahr und unwahr ist, unabhängig davon, ob die Einzelperson es erkennt. Im Gegensatz dazu unterscheidet Spencer-Brown (1997, Anmerkungen zu Kapitel 8) explizit zwischen „Demonstrationen“ innerhalb von Kalkülen, für die das gilt, und „Beweisen“, für die das nicht gilt. Sie liegen außerhalb von Kalkülen liegen und können nur um den Preis der Erschaffung eines neuen Kalküls, der eine neue Außenseite und den Bedarf neuer nicht-kodifizierter Beweise erzeugt, kodifiziert werden. Ein großer Teil der mathematischen Wahrheit besteht aus Ableitungen innerhalb von Kalkülen, die zwingend erscheinen, wenn man die Regeln des Kalküls akzeptiert. Doch der volle Umfang mathematischer Aussagen ist damit nicht erfassbar. Insbesondere lässt sich die Antwort auf die Frage, wie, gegeben eine formale Regel, eine „korrekte Regelanwendung“ aussieht, nicht formalisieren. Hier muss an die Intuition appeliert werden. Es scheint Einigkeit vorhanden zu sein, aber sie ist nicht erzwingbar.

Darüber hinaus werden menschliche MathematikerInnen dem Anspruch offenbar nicht gerecht, den Regeln eines Kalküls präzise zu folgen. KollegInnen berichten übereinstimmend, *jeder* von ihnen intensiv geprüfte Beweis oberhalb einer bestimmten Komplexität enthalte Fehler und Auslassungen, die nicht mit einfachen Mitteln zu reparieren sind. Im strengen Sinne sind es damit keine Beweise; sie benötigen die Intuition (oder die Unaufmerksamkeit) der LeserIn wesentlich, um anerkannt zu werden.

Eine andere Wirklichkeit sieht so aus, dass es eine institutionalisierte Mathematik gibt, deren Einfluss beim Zählen lernen der Kinder beginnt. Abweichungen von den für sicher geltenden Wahrheiten werden sanktioniert, z.B. durch schlechte Schulnoten. Sozial gesehen begibt sich, wer wesentliche Aussagen und Schlussformen der Mathematik negiert, außerhalb der Mathematik. Absolute Einigkeit ist für die Mathematik sozial konstitutiv. Dieses führt aber in der Vermittlung von Mathematik meistens dazu, dass Verständnis und Eigenkonstruktion gerade nicht erreicht, sondern durch den Einsatz mathematikfremder Mittel wie „Kompetenzglaube“, „Belohnung“ und „Strafe“ verhindert werden.

# 6 Mathematik konstruktivistisch verwenden

Ich habe versucht zu zeigen, dass die Verwendung von mathematischen Modellen konstruktiv in dem Sinne ist, dass sie Beobachtungen herstellt und verändert. „Konstruktivistisch“ würde ich sie dann nennen, wenn diese konstruktive Rolle angenommen wird, anstatt vorzugeben, dass vorhandene Wirklichkeit abgebildet werde

In der Arbeit mit mathematischen Modellen erfordert das

- ein Bewusstsein für den Charakter von Mathematik als vereinheitlichendes Kommunikationsmittel für *Gedankensysteme* statt objektiver Realitäten,
- explizite Diskussion der Frage, welche Wirklichkeit durch die Formalisierung hergestellt wird, sowohl bezogen auf das Denken über das zu modellierende Phänomen, als auch bezogen auf mittelbare Veränderungen durch z.B. Quantifizierung,
- explizite Reflektion der notwendig vorhandenen Unterschiede zwischen den Gedanken-Wirklichkeiten der Beteiligten und dem Modell (das kann zu einem komplexeren Modell führen, sofern wichtige Punkte fehlen und einfach hineinformalisiert werden können; konsequent betrieben ist die Erweiterung des Modells jedoch ein Irrweg, weil vollständige Passung ohnehin unmöglich ist und die sinnvolle Analysierbarkeit des Modells mit steigender Komplexität verlorengeht),
- ein Bewusstsein für die Risiken der Mathematisierung und für die Gefahr, dass Modelle als objektive Abbilder aufgenommen werden bzw. andererseits aufgrund dieses unterstellten Anspruchs grundsätzlich abgelehnt werden.

Wenn ich in Diskussionen sage, mathematische Modellierung solle auf den Anspruch nach korrekter Abbildung der Wirklichkeit verzichten, wird mir unter NaturwissenschaftlerInnen oft unterstellt, dass ich mathematische Modelle für wertlos hielte. Das ist nicht der Fall. Mathematik taugt m.E. wunderbar dazu, Klarheit über Denkstrukturen und deren Implikationen zu erlangen und Ideen zur Schaffung von Wirklichkeit zu liefern, sofern man es schafft, sich aus der positivistischen Falle zu befreien.

Hier sind einige kleine Beispiele dafür:

Von Heinz von Förster gibt es viele mathematische Modelle. Bei ihm ist die Verwendung zur Kommunikation von Gedanken offensichtlich. Er geht häufig so vor, dass er zunächst einen Gedanken erläutert. Danach oder parallel formalisiert er ihn sehr abstrakt, um dann konkrete Beispiele zu nennen, die offensichtlich der rein formalen Welt entnommen sind. Sie treffen sich mit der zu modellierenden Realität nur für den einen Gedanken treffen, um den es gerade geht. Zum Beispiel stellt er (- nicht nur - in „Gegenstände: greifbare Symbole für (Eigen-)Verhalten“ (1993), S. 103-115) die Konstruktion stabiler Objekte als iterativen Prozess $x_i = \mathrm{Op}(x_{i-1})$ zur Findung eines Fixpunktes $x = \mathrm{Op}(x)$ dar und gibt dafür einige mathematische Beispiele, z.B. $\mathrm{Op}= \exp \circ \cos$. Die Funktion dieser Beispiele besteht ganz offensichtlich nicht darin, konkrete weltliche Individuen zu modellieren, die Objekte wahrnehmen, sondern sie illustrieren verschiedene Möglichkeiten von Stabilität, die die Fixpunktiteration generell haben kann.

Ein anderes Beispiel ist die Diskussion in „Molekular-Ethologie: ein unbescheidener Versuch semantischer Klärung“ (1993, S. 149-193). Von Foerster versucht dort, anhand der mathematischen Theorie der Maschinen mit endlich vielen Zuständen „Reichweite und Grenzen bestimmter Konzepte in Theorien des Gedächtnisses, des Lernens und Verhaltens zu demonstrieren“. Eine angemessene Aufgabe für mathematische Modelle! Durch fast die ganze Diskussion spricht von Förster von den formalen Konstrukten als „Maschinen“ (manchmal „Urnen“, wenn es sich um probabilistische handelt), und trennt sie auf diese Weise suggestiv von den Lebewesen ab, um die es in den Gedankensystemen eigentlich geht - während es in der „objektivistischen“ mathematischen Modellierung eine übliche Unsitte ist, die formalen Strukturen gleich wie die zu modellierenden Realitätsteile zu benennen, weil man sich davon anscheinend erhöhte Zustimmung erhofft. Von Förster analysiert mit seinen Modellen jeweils Fragen der Art: „Wenn wir uns das auf diese Weise vorstellen, was ist in einem solchen Denkmodell dann möglich?“ Nachdem mehrere Beispiele, ein Neuron als Recheneinheit anzusehen, genannt und als „nützlich“ gelobt worden sind, kommentiert von Förster, „mag es nun überraschend wirken, wenn man feststellt, dass derartige Systeme rein physikalisch völlig absurd sind“ (1993, S. 186). Die Distanz bleibt gewahrt und wird betont - von Försters Modelle behalten ihren Status als Gedankenstrukturierer. Er leitet formal Konsequenzen her und fragt, ob sich diese zum Beispiel als „Lernen“ interpretieren lassen, wobei dem Begriff „Lernen“ erlaubt wird, von Theorie zu Theorie zu variieren. Die Modelle werden also auf Konsistenz mit den Vorstellungen geprüft, die zu modellieren sind, nicht jedoch mit Daten „an der Realität validiert“.

In Kapitel VII der „Systemtheorie der klinischen Psychologie“ stellt Schiepek (1991) ein Modell für die Entwicklung einer Depression in einem konkreten Einzelfall vor. An der Arbeit von Schiepek ist für mich vor allem die selbstkritische Diskussion beispielhaft. Schiepek thematisiert ausführlich die Grenzen der Anpassung von Modell und Realität. Er entwickelt daraus eine sinnvolle Zielsetzung für seine Modellierung: „Dynamische Modelle ... machen methodische Schwierigkeiten deutlich und schaffen dadurch Problembewusstsein. Sie zeigen auf, wo bei ihrer Programmierung überall Schätzungen, Vermutungen und Ad-hoc-Annahmen die Lücken des Wissens stopfen müssen. Sie weisen auf Widersprüche zwischen Teilhypothesen hin, indem sie diese entweder kollidieren lassen oder zu einer rekursiven Ergänzung führen. Sie liefern aber auch Verlaufsannahmen, welche Grundlagen sind für die Hypothesenbildung...“ (S. 233). Die Vorstellung des Modelles und der Ergebnisse ist detailliert und problembewusst genug, diese Ansprüche einzulösen.

Dabei bleibt Schiepek jedoch nicht stehen. Am Ende der Vorstellung des Modells und seiner Ergebnisse inszeniert er eine kontroverse Diskussion zwischen PraktikerInnen und WissenschaftlerInnen aus verschiedenen Fachrichtungen, die das Spannungsfeld zwischen realitätstreuer Komplexität und den begrenzten Möglichkeiten der Formalisierung und Modellierung beleuchtet. Das Modell wird schließlich „getestet“ anhand der Analyse der Reaktion auf die Veränderung von Modellparametern, nicht ohne zuvor klargestellt zu haben, dass „es sich bei einem Modelltest weniger um einen Falsifikationsversuch anhand der Wirklichkeit handelt als vielmehr um eine Konsistenzprüfung von aufgrund unterschiedlicher Prozeduren hergestellten Datenprodukten“ (S. 225). Die LeserIn ist so eingeladen, sich selber in die unterschiedlichen Aspekte des Modells mit eigenen Fragen und Antworten hineinzudenken. Es muss nichts einfach so hingenommen werden.

Ein letztes Beispiel soll die Fähigkeit mathematischer Strukturen verdeutlichen, Gedankengänge zu erklären und zu veranschaulichen. Angenommen, eine oder mehrere KlientInnen einer Therapie befinden sich in einer Situation, die sie als „erstarrt“ wahrnehmen. Ideen zur Veränderung werden nicht durchgeführt aus Angst, die Situation noch zu verschlechtern. Möglicherweise können die KlientInnen im Einzelnen sogar gut und einleuchtend erklären, warum die Situation sich verschlechtern wird. Hierfür liefert die Mathematik ein Bild. Man stelle sich eine Funktion vor, die auf der $x$-Achse in irgendeiner Form die Umstände und Handlungsweisen, die die Situation herstellen, zeigt (im zweidimensionalen Bild muss man sich die $x$-Achse eindimensional vorstellen, hierzu gibt es im mathematischen Formalismus jedoch keine Notwendigkeit). Die $y$-Achse zeige das

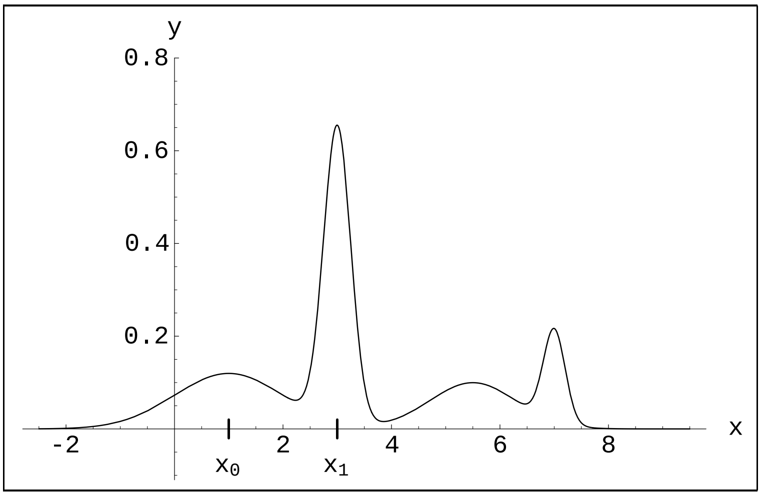


Abbildung 2: Funktion mit mehreren lokalen Maxima

Wohlbefinden der TeilnehmerInnen. Auch das ist hier eindimensional, in Anlehnung an die eindimensionale Formulierung „Es geht mir besser/schlechter“. Angenommen, die Situation befindet sich an einem Punkt, wo eine Veränderung in jede Richtung zunächst eine Verschlechterung bewirkt. Das ist ein „lokales Maximum“.

Im Bild 2 ist z.B. $x_0$ eine lokale Maximalstelle. Offenbar muss ein lokales Maximum nicht ein globales Maximum sein; es mag Situationen $x_1$ geben, in denen das Befinden wesentlich besser ist. Die ersten mathematisch-numerischen Verfahren, die Maximalstellen von Funktionen finden sollten, brachen die Suche ab, wenn sie sich in einem lokalen Maximum befanden. Mittlerweile gibt es leistungsfähigere Verfahren, die alle auf dem Prinzip beruhen, dass ein lokales Maximum testweise verlassen werden kann, um zu sehen, ob es anderswo noch bessere Maxima gibt. Damit das funktioniert, müssen die Verfahren erlauben, dass man im ersten Schritt eine Verschlechterung erlebt. Weiter sollten sie in irgendeiner Form kontrolliert sein, so dass sie nach einer gewissen Zeit unter Inkaufnahme von Verschlechterungen wieder zum Ausgangspunkt (oder zu einer gleichwertigen Situation) zurückkehren können, wenn die Suche nicht zu Erfolgen führt.

Eine Therapie ist natürlich kein numerisches Suchverfahren. Trotzdem scheint mir das Beispiel die Sinnhaftigkeit des Experimentierens mit bewusster Toleranz von vorübergehender Verschlechterung sehr einleuchtend zu zeigen. Diese Fähigkeit des Zeigens ist für mich die Qualität mathematischer Modelle.

**Summary**

**A constructivist view of mathematical models**

*The application of mathematical models is taken for granted in physics and the natural sciences. But their role is disputed in psychology and other sciences. „Objectivity“ is often attributed to the results of mathematical models. There are doubts if formalizations of the processes of life could fit the reality adequately. I want to show that it is not the quality of the mathematical formalism to fit adequately the reality. Rather mathematics is a unifying means to communication, and it necessarily simplifies and changes the*

*realities of the communicators. Concious of this property, mathematical models can be used profitably in all sciences. However, in most cases today, their application bases on the misunderstanding about „objectivity“.*

# Literatur

[1] Feyerabend, Paul (1995), „Wider den Methodenzwang“ (5. Auflage), Suhrkamp, Frankfurt am Main.

[2] von Förster, Heinz (1993), „Wissen und Gewissen“, hrsg. v. S. J. Schmidt, Suhrkamp, Frankfurt am Main.

[3] Koyré, Alexandre (1998), „Leonardo, Galilei, Pascal. Die Anfänge einer neuzeitlichen Naturwissenschaft“, Suhrkamp, Frankfurt am Main.

[4] Lewin, Kurt (1936), „Principles of Topological Psychology“, McGraw-Hill, New York.

[5] Mulser, Peter (1996), *Über Voraussetzungen einer quantitativen Naturbeschreibung* in Braitenberg, V., Hosp, I. (Hrsg.): „Die Natur ist unser Modell von ihr“, Rowohlt, Reinbek.

[6] Ortlieb, Claus P. (2000), „Exakte Naturwissenschaft und Modellbegriff“, Hamburger Beiträge zur Modellierung und Simulation, Heft 15, Universität Hamburg.

[7] Schiepek, Günter (1991), „Systemtheorie der klinischen Psychologie“, Vieweg, Braunschweig.

[8] Spencer-Brown, George (1997), „Gesetze der Form“ (deutsche Ausgabe), Bohmeyer, Lübeck.

**Kurzbiographie**

*Hennig, Christian*, Dr. Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg, Zentrum für Modellierung und Simulation und Schwerpunkt für mathematische Stochastik. Arbeitsgebiete: Statistik, insbesondere Clusteranalyse, philosophische Grundlagen der mathematischen Modellierung, der Statistik und des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

**Anschrift des Verfassers**

Dr. Christian Hennig
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik - SPST
Bundesstr. 55
D- 20146 Hamburg