Задачи спектральной теории дифференциальных операторов

Dmitri Vassiliev
(University College London)

Кто я такой и откуда я взялся

1972–1978 студент ФУПМа

1978–1981 аспирант МФТИ, научный руководитель Виктор Борисович Лидский

1981–1991 Институт Проблем Механики АН СССР

1991–1999 University of Sussex

1999–2006 University of Bath

2006– University College London

Простейшая задача спектральной теории дифференциальных операторов: свободные колебания струны

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u, \qquad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Спектральный параметр λ пропорционален квадрату частоты.

Собственные значения и собственные функции вычисляются явно

$$\lambda_k = k^2, \qquad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть теперь Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим задачу об акустическом резонаторе

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Посчитать собственные значения $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ трудно, поэтому вводим в рассмотрение функцию распределения собственных значений

$$N(\lambda) := \sum_{\lambda_k < \lambda} 1$$

(число собственных значений λ_k меньших данного λ).

Формула Рэлея-Джинса (1905):

$$N(\lambda) = \frac{V}{6\pi^2}\lambda^{3/2} + o(\lambda^{3/2}) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty,$$

где V объём резонатора. Строгое доказательство: Г.Вейль (1912).

Обшая постановка задачи. Пусть M n-мерное компактное многообразие с краем ∂M и пусть A эллиптический само-сопряжённый полуограниченний снизу оператор чётного порядка $2m$ действуюший на M. Рассмотрим спектральную задачу

$$Au = \lambda u \quad \text{на} \quad M, \qquad (B^{(j)}u)\Big|_{\partial M} = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Тогда

$$N(\lambda) = a\lambda^{n/(2m)} + o(\lambda^{n/(2m)}) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty,$$

где константа a вычисляется явно.

Гипотеза Вейля: справедлива двучленная асимптотика

$$N(\lambda) = a\lambda^{n/(2m)} + b\lambda^{(n-1)/(2m)} + o(\lambda^{(n-1)/(2m)}) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty,$$

где константа b тоже вычисляется явно и учитывает краевые эффекты.

Мой основной результат:

Теорема *Гипотеза Вейля верна если не слишком много периодических и тупиковых биллиардных траекторий.*

"Не слишком много" = "мера стартовых точек равна нулю".

Yu.Safarov and D.Vassiliev, *The asymptotic distribution of eigenvalues of partial differential operators*, American Mathematical Society, 1997 (hardcover), 1998 (softcover).

Основная идея доказательства: заменить спектральный параметр λ на $2m$-ую производную по времени

$$Au = \left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2m} u$$

и строить оператор $e^{-itA^{1/(2m)}}$ (“волновая группа”). Волновая группа строится явно, по модулю интегрального оператора с бесконечно гладким ядром, методами *микролокального анализа* (см. 4 тома Хёрмандера). Потом берётся след волновой группы (в смысле обобщённых функций) и применяются *тауберовы теоремы Фурье* которые превращают время t обратно в спектральный параметр λ.

Пример: свободные колебания пластины

$$\Delta^2 u = \lambda u \quad \text{в} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \qquad u|_{\partial\Omega} = \partial u/\partial n|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда

$$N(\lambda) = \frac{S}{4\pi}\lambda^{1/2} + \frac{\beta L}{4\pi}\lambda^{1/4} + o(\lambda^{1/4}) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty,$$

где S площадь пластины, L длина границы и

$$\beta = -1 - \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(5/4)} \approx -1.763.$$

Первый член асимптотики был найден Курантом (1922).

Обращая мою формулу и переходя к частотам $\lambda_N^{1/2}$, получаем

$$\lambda_N^{1/2} = \frac{4\pi}{S}N - \frac{2\sqrt{\pi}\,\beta L}{S^{3/2}}\sqrt{N} + o(\sqrt{N}\,) \quad \text{при} \quad N \to +\infty.$$

Другие спектральные задачи которые я изучал

1 Колебания тонких упругих оболочек.

2 Колебания оболочек контактирующих с жидкостью.

3 Фрактальные барабаны (fractal drums).

4 Локализованные волны (trapped modes).

5 Краевой резонанс (edge resonance).

Чем я занимаюсь сейчас

Изучаю системы нелинейных гиперболических уравнений в размерности $1+3$ используя методы микролокального анализа. Цель – создать новые математические модели для фермионов (нейтрино, электрон).

Основные идеи

1 Можно сначала решить линейную задачу а потом коэффициенты уравнения (главный символ) сделать независимыми переменными. Это упрошённый способ изучения нелинейных уравнений (poor man's approach).

2 Время можно отделить а коэффициент при втором члене спектральной асимптотики рассматривать как действие (вариационный функционал).

3 Микролокальный анализ даёт метод построения волнового пакета, значит есть надежда когда-нибудь построить солитон который бы имел свойства элементарной частицы.

Что я умею делать на сегодняшний день

Умею извлекать геометрические структуры из системы уравнений в частных производных:

1 метрика,

2 связность,

3 кручение,

4 спинор,

5 лагранжиан Дирака,

6 электромагнитный векторный потенциал.

Мемориальный том Виктора Борисовича Лидского:

Victor Borisovich Lidskii (1924-2008), American Mathematical Society, 2010, editors M.Levitin and D.Vassiliev.

В предисловии кратко описывается биография Лидского и объясняется (западному читателю) что такое Физтех. Предисловие можно прочитать на интернете.

Все гиперссылки на моей странице. Чтобы найти мою страницу достаточно ввести “Vassiliev” в Google.