

Entfallene Aufgaben

Dieses Dokument besteht aus Inhalten der *ersten* Auflage des Buches *Vorbereitungskurs Staatsexamen Mathematik* von Dominik Bullach und Johannes Funk, die in der *zweiten* Auflage nicht mehr enthalten sind.

Alle Seitenangaben sowie Referenzen beziehen sich auf die *zweite* Auflage des Buches, erschienen bei Springer Spektrum, 2021.

Inhaltsverzeichnis

1	Entfallene Aufgaben – Algebra	2
1.1	Direkte und Semidirekte Produkte	2
1.2	Sylow-Sätze und ihre Anwendungen	2
1.3	Auflösbarkeit	5
1.4	Irreduzibilität	6
1.5	Lineare Algebra	10
2	Entfallene Aufgaben – Analysis	11
2.1	Potenz- und Laurentreihen	11
2.2	Komplexe Integrale	12
2.3	Satz von Rouché	15
2.4	Biholomorphe Abbildungen	17
2.5	Ebene Systeme	21
3	Algebra: Aufgabenlösungen nach Jahrgängen	23
	Frühjahr 2015	23
	Herbst 2015	28
	Frühjahr 2016	37
	Herbst 2016	56
	Frühjahr 2017	73
	Herbst 2017	92
4	Analysis: Aufgabenlösungen nach Jahrgängen	106
	Frühjahr 2015	106
	Herbst 2015	124
	Frühjahr 2016	143
	Herbst 2016	169
	Frühjahr 2017	193

1 Entfallene Aufgaben – Algebra

1.1 Direkte und Semidirekte Produkte

Aufgabe (Frühjahr 2013, T3A1)

Man konstruiere eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2013.

Hinweis Verwenden Sie ein geeignetes semidirektes Produkt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2013, T3A1)

Wir bemerken zunächst, dass $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ ist. Unser Ziel ist, im Folgenden einen nicht-trivialen Homomorphismus $\phi: \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})$ zu definieren. Dazu verwenden wir, dass nach Proposition 1.24 (2)

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$$

eine zyklische Gruppe der Ordnung $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ist. Wegen $3 \mid 60$ gibt es ein Element $a \in \text{Aut}(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})$ mit $\text{ord } a = 3$. Da 3 ein Teiler von $33 = \text{ord}(\bar{1})$ ist, gibt es nach Proposition 1.24 (1) einen eindeutigen Homomorphismus

$$\phi: \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}) \quad \text{mit} \quad \phi(\bar{1}) = a.$$

Dieser ist nicht-trivial, denn es gilt $a \neq \text{id}$ wegen $\text{ord } a = 3$ und somit $\phi(\bar{1}) \neq \text{id}$. Gemäß Proposition 1.23 ist dann $\mathbb{Z}/61\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $33 \cdot 61 = 2013$ ist.

1.2 Sylow-Sätze und ihre Anwendungen

Anleitung: Isomorphietyp von Gruppen mittels Sylowsätzen und semidirektem Produkt bestimmen

Sei G eine Gruppe.

- (1) Verwende die Sylowsätze, um die Anzahlen der jeweiligen Sylowgruppen von G einzugrenzen. Optimalerweise ist dann

- eine Sylowgruppe oder ein Produkt von Sylowgruppen ein Normalteiler N von G und
 - N abelsch und von bekanntem Isomorphietyp, da z. B. die Ordnung von N eine Primzahl ist.
- (2) In aller Regel wird es nun eine Sylowgruppe P von G geben, die $G = NP$ und $N \cap P = \{e\}$ aus Ordnungsgründen erfüllt, von der man aber nicht weiß, ob sie ein Normalteiler ist. Nach Satz 1.22 (2) ist G isomorph zu einem semidirekten Produkt $N \rtimes_{\phi} P$ mit einem Homomorphismus $\phi: P \rightarrow \text{Aut}(N)$.
- (3) Kann man ausschließen, dass es einen nicht-trivialen Homomorphismus $\phi: P \rightarrow \text{Aut}(N)$ gibt, so ist $G \cong P \times N$ nach Proposition 1.23. Dazu kann man meist eine der beiden gleichwertigen Vorgehensweisen befolgen:
- Ist $a \in P$, dann muss die Ordnung von $\phi(a)$ ein Teiler der Ordnung von a sein. Sind $|P|$ und $|\text{Aut}(N)|$ teilerfremd (verwende ggf. Proposition 1.24 (2)), so muss $\phi(a) = \text{id}_N$ sein. Da a beliebig gewählt war, folgt $\phi(a) = \text{id}_N$ für alle $a \in P$, d. h. ϕ ist trivial.
 - Es ist $\phi(P)$ eine Untergruppe von $\text{Aut}(N)$, d. h. $|\phi(P)|$ muss $|\text{Aut}(N)|$ teilen. Gleichzeitig ist laut Homomorphiesatz $P / \ker \phi \cong \phi(P)$, sodass $|\phi(P)|$ auch ein Teiler von $|P|$ ist. Haben P und $\text{Aut}(N)$ teilerfremde Ordnungen, so muss $\phi(P) = \{\text{id}_N\}$ sein, d. h. ϕ ist trivial.

Aufgabe (Herbst 2000, T1A1)

Sei G eine Gruppe mit 2001 Elementen. Zeigen Sie:

- a** Die p -Sylowgruppen sind für $p = 23$ und $p = 29$ normal.
- b** Auch die 3-Sylowgruppe von G ist normal.
- c** Die Gruppe G ist zyklisch.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2000, T1A1)

- a** Es gilt $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Wir verwenden zunächst den Dritten Sylowsatz und erhalten für die Anzahl der 23-Sylowgruppen ν_{23}

$$\nu_{23} \mid 3 \cdot 29 \quad \Rightarrow \quad \nu_{23} \in \{1, 3, 29, 3 \cdot 29\}.$$

Wegen

$$3 \not\equiv 1 \pmod{23}, \quad 29 \equiv 6 \pmod{23} \quad \text{und} \quad 3 \cdot 29 \equiv 3 \cdot 6 \equiv 18 \pmod{23}$$

ist nur $\nu_{23} = 1$ möglich. Dies bedeutet bereits, dass die einzige 23-

Sylowgruppe von G ein Normalteiler ist.

Eine völlig analoge Rechnung zeigt $\nu_{29} = 1$, also ist auch die 29-Sylowgruppe ein Normalteiler von G .

b Wir schränken die Anzahl ν_3 der 3-Sylowgruppen zunächst ein:

$$\begin{aligned} \nu_3 \mid 23 \cdot 29 &\Rightarrow \nu_3 \in \{1, 23, 29, 23 \cdot 29\}, \\ 23 \equiv 2 \pmod{3}, \quad 29 \equiv 2 \pmod{3}, \quad 23 \cdot 29 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}, \end{aligned}$$

somit kann $\nu_3 = 1$ oder $\nu_3 = 23 \cdot 29 = 667$ sein.

Sei P_{23} die einzige 23-Sylowgruppe und P_{29} die einzige 29-Sylowgruppe. Wir zeigen nun, dass G das innere direkte Produkt von P_{23} , P_{29} und einer beliebigen 3-Sylowgruppe P_3 ist. Setze dazu $N = P_{23} \cdot P_{29}$. Da nach Teil **a** sowohl P_{23} als auch P_{29} ein Normalteiler ist, ist N ebenfalls ein Normalteiler von G .

N hat als inneres direktes Produkt von P_{23} und P_{29} die Ordnung $23 \cdot 29$. Es folgt $N \cap P_3 = \{e\}$, da die Ordnungen von P_3 und N teilerfremd sind. Es bleibt noch zu zeigen, dass $G = NP_3$ gilt. Dazu berechnen wir:

$$|NP_3| = \frac{|N| \cdot |P_3|}{|N \cap P_3|} = \frac{23 \cdot 29 \cdot 3}{1} = 23 \cdot 29 \cdot 3 = |G|.$$

Zusammen mit $NP_3 \subseteq G$ erhalten wir daraus $NP_3 = G$. Insgesamt ist also G tatsächlich ein inneres semidirektes Produkt von N und P_3 . Damit ist G isomorph zum äußeren semidirekten Produkt dieser Untergruppen, d. h.

$$G \cong N \rtimes_{\phi} P_3$$

für einen geeigneten Homomorphismus $\phi: P_3 \rightarrow \text{Aut}(N)$. Wir zeigen, dass dafür nur die triviale Abbildung infrage kommt. Es gilt

$$\text{Aut}(N) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/29\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/23\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^{\times}.$$

Also hat $\text{Aut}(N)$ die Ordnung $\varphi(23 \cdot 29) = 22 \cdot 28$. Ist $a \in P_3$, so ist $\text{ord } a$ ein Teiler von 3 und auch die Ordnung von $\phi(a)$ muss 3 teilen. Wegen $3 \nmid 22 \cdot 28$ kommt dafür nur 1 infrage, und es gilt $\phi(a) = \text{id}$ für alle $a \in P_3$. Damit ist ϕ trivial und G ist sogar das direkte äußere Produkt von N und P_3 , d. h.

$$G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(23 \cdot 29)\mathbb{Z}. \quad (*)$$

Somit ist G aber abelsch, d. h. jede Untergruppe ist Normalteiler. Insbesondere gilt das für die – beliebige gewählte – 3-Sylowgruppe P_3 .

c Aus der Isomorphie $(*)$ und dem Chinesischen Restsatz folgt unmittelbar

$$G \cong \mathbb{Z}/2001\mathbb{Z}.$$

1.3 Auflösbarkeit

Aufgabe (Frühjahr 2015, T1A3)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:

- a** G hat einen Normalteiler N mit $|N| = 5$ oder $|N| = 7$.
b G ist auflösbar.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T1A3)

- a** Es gilt $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Nach dem Dritten Sylowsatz gilt

$$v_5 \mid 21 \Rightarrow v_5 \in \{1, 3, 7, 21\} \quad \text{und} \quad v_7 \mid 15 \Rightarrow v_7 \in \{1, 3, 5, 15\}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 1 \pmod{5}, & 3 &\not\equiv 1 \pmod{5}, & 7 &\equiv 2 \not\equiv 1 \pmod{5}, & 21 &\equiv 1 \pmod{5}, \\ 1 &\equiv 1 \pmod{7}, & 3 &\not\equiv 1 \pmod{7}, & 5 &\not\equiv 1 \pmod{7}, & 15 &\equiv 1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Und wir erhalten insgesamt $v_7 \in \{1, 15\}$ sowie $v_5 \in \{1, 21\}$. Nehmen wir nun an, dass $v_5 \neq 1$ und $v_7 \neq 1$, d.h. $v_5 = 21$ und $v_7 = 15$.

Die 5-Sylowgruppen haben 5 Elemente: das Neutralelement sowie 4 Elemente der Ordnung 5. Da jedes der Elemente der Ordnung 5 bereits die ganze 5-Sylowgruppe erzeugt, schneiden sich je zwei der 5-Sylowgruppen nur im Neutralelement. Somit existieren $4 \cdot 21 = 84$ Elemente der Ordnung 5. Das gleiche Argument liefert $6 \cdot 15 = 90$ Elemente der Ordnung 7. Damit müsste G aber zusammen mit dem Neutralelement

$$90 + 84 + 1 = 175 > 105$$

Elemente besitzen – Widerspruch. Eine der beiden Anzahlen muss also 1 sein – die zugehörige Sylowgruppe ist dann ein Normalteiler.

- b** 1. Fall. Es gibt eine normale 5-Sylowgruppe, d.h. einen Normalteiler N von G mit $|N| = 5$.

Da N Primzahlordnung hat, ist die Gruppe zyklisch, also abelsch und somit auflösbar. Für die Faktorgruppe G/N gilt

$$|G/N| = \frac{|G|}{|N|} = \frac{105}{5} = 21.$$

Wir untersuchen in G/N die Anzahl der 7-Sylowgruppen \bar{v}_7 . Man erhält

$$\bar{v}_7 \mid 3 \Rightarrow \bar{v}_7 \in \{1, 3\}, \quad 1 \equiv 1 \pmod{7}, \quad 3 \not\equiv 1 \pmod{7}.$$

Somit ist die 7-Sylowgruppe P in G/N ein Normalteiler. Wir können also die Faktorgruppe $(G/N)/P$ betrachten. Für diese gilt nun

$$|(G/N)/P| = \frac{|G/N|}{|P|} = \frac{21}{7} = 3.$$

Damit ist die Faktorgruppe $(G/N)/P$ zyklisch, also auflösbar. Ebenso ist auch P auflösbar. Damit ist laut Satz 1.30 die Gruppe G/N auflösbar. Nochmalige Anwendung von Satz 1.30 liefert, dass G auflösbar ist.

2. *Fall.* Es gibt eine normale 7-Sylowgruppe, d. h. einen Normalteiler N von G mit $|N| = 7$. Da auch hier N Primzahlordnung hat, ist N zyklisch und somit auflösbar. Für die Faktorgruppe G/N erhält man $|G/N| = (G : N) = 15$. An dieser Stelle verfährt man entweder analog zu oben (d. h. man zeigt, dass in G/N wiederum die 5-Sylowgruppe ein Normalteiler ist, und folgert, dass somit G/N auflösbar ist) oder man weiß, dass Gruppen der Ordnung 15 stets zyklisch sind (der Allgemeinfall ist in H04T2A1 auf Seite 50 abgedeckt), weshalb sofort folgt, dass G/N auflösbar ist.

1.4 Irreduzibilität

Aufgabe (Frühjahr 2010, T3A1)

Berechnen Sie alle rationalen Nullstellen des Polynoms

$$f = X^5 + X^4 - 2.$$

Begründen Sie insbesondere, dass es über die von Ihnen angegebenen Nullstellen hinaus keine weiteren rationalen Nullstellen gibt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2010, T3A1)

Am einfachsten verwendet man Lemma 2.23. Danach kommen nur Teiler von 2 infrage. Durch Ausprobieren findet man $f(1) = 0$ und keine weitere Nullstellen.

Alternative aus der ersten Auflage: Man findet $f(1) = 0$. Wir können daher den Linearfaktor $(X - 1)$ ausklammern:

$$\begin{aligned} f &= X^5 + X^4 - 2 = (X - 1)X^4 + 2X^4 - 2 = (X - 1)X^4 + 2(X^4 - 1) \\ &= (X - 1)X^4 + 2(X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)X^4 + 2(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1) \\ &= (X - 1) \left(X^4 + 2(X + 1)(X^2 + 1) \right) = (X - 1)(X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 2) \end{aligned}$$

Das Polynom $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ ist nach dem Eisensteinkriterium irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, besitzt also keine rationalen Nullstellen, denn eine Nullstelle würde einen Teiler vom Grad 1 bedeuten. Also ist 1 die einzige Nullstelle von f in \mathbb{Q} .

Aufgabe (Herbst 2001, T3A5)

a Zeigen Sie:

Es gibt kein Polynom $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$, sodass $P(7) = 5$ und $P(9) = 4$ gilt.

b Zeigen Sie für $a, b \geq 3$, $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$X(X-3)(X-a)(X-b) + 1 \quad \text{ist irreduzibel in } \mathbb{Z}[X].$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2001, T3A5)

a Nehmen wir an, es gibt ein solches Polynom $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ mit $P(9) = 4$ und $P(7) = 5$. Es gilt $(X - Y) \mid P(X) - P(Y)$ in $\mathbb{Z}[X, Y]$, denn es ist $X \equiv Y \pmod{X - Y}$ und somit

$$P(X) - P(Y) \equiv 0 \pmod{X - Y}.$$

Einsetzen von $X = 9$ und $Y = 7$ liefert dann

$$2 = 9 - 7 \quad \text{teilt} \quad P(9) - P(7) = 4 - 5 = -1.$$

Dies ist in \mathbb{Z} nicht möglich.

b Sei $f = X(X-3)(X-a)(X-b) + 1$. Es hat f keine Nullstellen in \mathbb{Z} , denn diese müssten laut 2.23 den konstanten Koeffizienten 1 teilen. Die einzigen Kandidaten für eine Nullstelle sind also $+1$ und -1 . Andererseits sieht man

$$|f(1) - 1| = |-2(1-a)(1-b)| \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$|f(-1) - 1| = |-4(1+a)(1+b)| \geq 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64,$$

sodass weder 1 noch -1 Nullstellen sein können. Nehmen wir nun an, es gibt Polynome $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ von Grad 2, sodass $f = g \cdot h$. Da f normiert ist, müssen auch g und h normiert sein. Also ist $g - h$ ein Polynom von Grad ≤ 1 . Weiter ist

$$g(0) \cdot h(0) = f(0) = 1 = f(3) = g(3) \cdot h(3),$$

also sind $g(0), h(0), g(3), h(3)$ jeweils $+1$ oder -1 , in jedem Fall aber

$$g(0) = h(0) \quad \text{und} \quad g(3) = h(3).$$

Damit hat $g - h$ mindestens die beiden verschiedenen Nullstellen 0 und 3 . Da $g - h$ höchstens Grad 1 hat, muss es das Nullpolynom sein. Dies bedeutet $g = h$ und $f = g^2$. Anders ausgedrückt:

$$\begin{aligned} X(X-3)(X-a)(X-b) + 1 &= g^2 \\ X(X-3)(X-a)(X-b) &= g^2 - 1 = (g-1)(g+1) \end{aligned}$$

Als Polynomring über einem faktoriellen Ring ist $\mathbb{Z}[X]$ faktoriell, d. h. die linke Seite der letzten Gleichung lässt sich als eindeutige Zerlegung in irreduzible Faktoren auffassen.

1. Fall: $X \mid (g-1)$. Dann muss sich $(g+1)$ aus Gradgründen aus zwei der Faktoren $(X-3), (X-a)$ und $(X-b)$ zusammensetzen. Nach Annahme ist $g(0) - 1 = 0$, d. h. $g(0) + 1 = 2$. Vergleich des letzten Koeffizienten möglicher Zerlegungen von $g+1$ zeigt, dass dann eine der Gleichungen

$$3a = 2, \quad 3b = 2 \quad \text{oder} \quad ab = 2$$

erfüllt sein müsste. Wegen $a, b \geq 3$ ist dies jedoch nicht möglich.

2. Fall: $X \mid (g+1)$. Dann ist $g(0) + 1 = 0$, sodass $g(0) - 1 = -2$. Wie im obigen Fall betrachtet man den konstanten Term möglicher Zerlegungen von $g+1$ in die Terme $(X-3), (X-a)$ und $(X-b)$. Dabei ergeben sich folgende Gleichungen

$$3a = -2 \quad 3b = -2 \quad ab = -2,$$

die wegen $a, b \geq 3$ ebenfalls nicht erfüllt sein können.

Insgesamt haben wir damit nachgewiesen, dass f kein Quadrat in $\mathbb{Z}[X]$ sein kann. Es ist daher f ein Polynom von Grad 4 , das weder einen Teiler von Grad 1 noch von Grad 2 hat. Somit ist f irreduzibel.

Aufgabe (Frühjahr 2000, T1A1)

Weisen Sie für eine Primzahl p die Äquivalenz folgender Aussagen nach:

- a** $f = X^2 + 2X + 2$ ist irreduzibel über dem Körper mit p^3 Elementen.
- b** $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2000, T1A1)

Für $p = 2$ ist

$$f = X^2 + \bar{2}X + \bar{2} = X^2 \in \mathbb{F}_2$$

reduzibel, also ist in diesem Fall die Äquivalenz erfüllt. Sei daher im Folgenden p eine ungerade Primzahl. Wir führen die Irreduzibilität von f in \mathbb{F}_{p^3} zunächst auf die Irreduzibilität über \mathbb{F}_p zurück.

Behauptung 1: Es ist f genau dann irreduzibel über \mathbb{F}_{p^3} , wenn f irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist.

„ \Rightarrow “: Ist klar, denn gäbe es eine echte Zerlegung von f über \mathbb{F}_p , so wäre dies insbesondere eine Zerlegung über \mathbb{F}_{p^3} und damit wäre f auch in \mathbb{F}_{p^3} reduzibel.

„ \Leftarrow “: Nach Voraussetzung ist f irreduzibel über $\mathbb{F}_p[X]$, d. h. ist α eine Nullstelle von f in einem algebraischen Abschluss von \mathbb{F}_p , so ist f das Minimalpolynom von α und es folgt $[\mathbb{F}_p(\alpha) : \mathbb{F}_p] = 2$. Wäre nun f reduzibel in $\mathbb{F}_{p^3}[X]$, so müsste f dort in Linearfaktoren zerfallen, d. h. $\alpha \in \mathbb{F}_{p^3}$. Insbesondere wäre $\mathbb{F}_p(\alpha)$ ein Teilkörper von \mathbb{F}_{p^3} , sodass also nach der Gradformel

$$2 = [\mathbb{F}_p(\alpha) : \mathbb{F}_p] \quad \text{teilt} \quad [\mathbb{F}_{p^3} : \mathbb{F}_p] = 3$$

gilt, was offensichtlich nicht sein kann. Folglich muss f irreduzibel über \mathbb{F}_{p^3} sein.

Behauptung 2: Genau dann ist f irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$, wenn $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Als Polynom von Grad 2 ist f genau dann irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$, wenn f keine Nullstelle in \mathbb{F}_p besitzt. Sei $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}_p$ eine Nullstelle von f in einem algebraischen Abschluss von \mathbb{F}_p . Dann gilt

$$(\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + \bar{2}\alpha + \bar{1} = f(\alpha) - \bar{1} = -\bar{1}.$$

Liegt α in \mathbb{F}_p , so ist also $-\bar{1}$ ein Quadrat in \mathbb{F}_p . Gibt es umgekehrt ein Element $\beta \in \mathbb{F}_p$ mit $\beta^2 = -\bar{1}$, so gilt

$$f(\beta - \bar{1}) = (\beta - 1)^2 + \bar{2}(\beta - \bar{1}) + 2 = \beta^2 - 2\beta + \bar{1} + 2\beta - \bar{2} + 2 = -\bar{1} + \bar{1} = \bar{0},$$

sodass f eine Nullstelle in \mathbb{F}_p besitzt. Wir haben damit gezeigt, dass f genau dann irreduzibel über \mathbb{F}_p ist, wenn $-\bar{1}$ kein Quadrat in \mathbb{F}_p ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn für das Legendre-Symbol gilt, dass

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1.$$

Dabei haben wir die Ergänzungssätze (Proposition 2.20) verwendet. Damit die letzte Bedingung erfüllt ist, muss der Exponent ungerade sein, sodass dies wiederum äquivalent ist zu

$$\frac{p-1}{2} \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow p-1 \equiv 2 \pmod{4} \Leftrightarrow p \equiv 3 \pmod{4}.$$

1.5 Lineare Algebra

Aufgabe (Herbst 2005, T3A3)

Geben Sie alle Lösungen X der Gleichung

$$X^7 = \mathbb{1}_5$$

in der Gruppe $GL_5(\mathbb{Q})$ an (mit Begründung).

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2005, T3A3)

Sei $A \in GL_5(\mathbb{Q})$ eine Lösung der angegebenen Gleichung. Dann ist $A^7 - \mathbb{E}_5 = 0$, d. h. das Minimalpolynom μ_A von A ist ein Teiler von $X^7 - 1$. Nun ist die Zerlegung dieses Polynoms in über $\mathbb{Q}[X]$ irreduzible Faktoren durch

$$X^7 - 1 = \prod_{n|7} \Phi_n = \Phi_1 \cdot \Phi_7 = (X - 1) \cdot (X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

gegeben, wobei Φ_n jeweils das n -te Kreisteilungspolynom bezeichnet. Damit ist

$$\mu_A \in \{(X - 1), \Phi_7, X^7 - 1\}.$$

Da μ_A nach dem Satz von Cayley-Hamilton 4.6 das charakteristische Polynom teilt, ist $\deg \mu_A \leq \deg \chi_A$. Weil $A \in GL_5(\mathbb{Q})$ eine (5×5) -Matrix ist, hat χ_A den Grad 5. Somit kann nur $\mu_A = X - 1$ sein. Es folgt

$$0 = \mu_A(A) = A - \mathbb{E}_5 \Leftrightarrow A = \mathbb{E}_5.$$

2 Entfallene Aufgaben – Analysis

2.1 Potenz- und Laurentreihen

Aufgabe (Herbst 2004, T2A2)

Beweisen Sie, dass durch

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^z}$$

in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ eine holomorphe Funktion f definiert ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2004, T2A2)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion

$$f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\cos n}{n^z}$$

und bemerken, dass jede Funktion f_n als Quotient holomorpher Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner wiederum holomorph ist. Falls wir nun zeigen können, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in der Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ lokal gleichmäßig konvergiert, dann definiert f dort nach dem Weierstraß'schen Konvergenzsatz eine holomorphe Funktion.

Sei also $a \in \mathbb{H}$ beliebig vorgegeben und setze $r = \frac{1}{2}(\operatorname{Re}(a) - 1)$. Für alle $z \in B_r(a)$, dem offenen Ball von Radius r um a , gilt dann

$$|a - z| < r \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}(a) - \operatorname{Re}(z) < r \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(a) < \operatorname{Re}(z).$$

Insbesondere also $1 < \operatorname{Re}(z)$, daher haben wir $B_r(a) \subseteq \mathbb{H}$. Nach dem Weierstraß'schen Majorantenkriterium (Satz 6.11) genügt es nun, eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen $(M_n)_{n \geq 1}$ zu finden, sodass

- (1) $|f_n(z)| \leq M_n$ für alle $z \in B_r(a)$,
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ ist konvergent.

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl, dann gilt

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = |e^x| \cdot 1 = |e^{\operatorname{Re} z}| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Damit ist

$$|n^z| = |\exp(z \log n)| = \exp(\operatorname{Re} z \log n) = \exp(x \log n) = \exp(\log n^x) = n^x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählen wir $M_n := \frac{1}{n}$, so haben wir für alle $z \in B_r(a)$ daher die Abschätzung

$$|f_n(z)| = \left| \frac{\cos n}{n^z} \right| \leq \frac{1}{|n^z|} = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}\operatorname{Re}(a)}} = M_n,$$

wobei wir im letzten Schritt auf die Abschätzung $x < 1 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(a)$ von zuvor zurückgegriffen haben. Aus der Analysis 1 weiß man (oder auch nicht), dass die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für reelles $\alpha > 1$ konvergiert, folglich konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ und der Aufgabenstellung ist Genüge getan.

2.2 Komplexe Integrale

Aufgabe (Frühjahr 2013, T2A2)

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ die Kurve mit $\gamma(t) = e^{-it}$. Weiterhin bezeichne $P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ das n -te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Zeigen Sie, dass für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 1$ gilt:

$$P_n(w) = \frac{w^{n+1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-w)} dz.$$

Hinweis Man schreibe den im Integranden auftretenden Faktor als $\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w[1-(z/w)]}$ und verwende dann die geometrische Reihe.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2013, T2A2)

Wir berechnen, dem Hinweis folgend,

$$\begin{aligned} \frac{w^{n+1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-w)} dz &= \frac{w^{n+1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{-f(z)}{z^{n+1}w(1-\frac{z}{w})} dz = \\ &= -\frac{w^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} dz \\ &= -\frac{w^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k dz \end{aligned}$$

An dieser Stelle teilen wir die Summe auf und betrachten zunächst die

Summanden mit $k \geq n+1$: Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $|w| > 1 + \varepsilon$, dann ist $q := \left| \frac{z}{w} \right| < 1$ für alle $z \in B_{1+\varepsilon}(0)$, sodass die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ eine konvergente Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k$ ist. Folglich definiert

$$\frac{f(z)}{z^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k = \frac{f(z)}{z^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^{k+(n+1)} = \frac{f(z)}{w^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{w^k}$$

eine holomorphe Funktion auf $B_{1+\varepsilon}(0)$ und laut dem Cauchy-Integralsatz 6.28 gilt

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k dz = 0.$$

Für die restlichen Summanden verwenden wir die Cauchy-Integralformel 6.30 und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{-w^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{z}{w}\right)^k dz &= \frac{-w^n}{2\pi i} \sum_{k=0}^n \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \left(\frac{z}{w}\right)^k dz = \\ &= \frac{-w^n}{2\pi i} \sum_{k=0}^n \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1-k}} \frac{1}{w^k} dz = \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \sum_{k=0}^n \int_{\gamma} \frac{w^{n-k} f(z)}{z^{n+1-k}} dz = \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \sum_{k=0}^n 2\pi i \cdot n(\gamma, 0) \cdot \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} w^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} w^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} w^k = P_n(w). \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass die Umlaufzahl von γ um 0 gleich -1 ist.

Residuum im Punkt ∞

Für die folgende Aufgabe benötigen wir noch die Definition des Residuums im „Punkt“ ∞ . Man setzt hier analog zur Definition 6.32

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

für eine Kurve γ mit hinreichend großem Radius, sodass keine andere Singularität umlaufen wird. Eine für die explizite Berechnung besser geeignete Formel ist

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = \operatorname{Res}\left(\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right),$$

die man mittels Substitution $z \mapsto \frac{1}{z}$ aus der Definition erhält.

Aufgabe (Herbst 2003, T1A3)

(a) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$$

in allen Singularitäten sowie im Punkt ∞ .

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_C \frac{dz}{z^4 + 1},$$

wobei C die positiv durchlaufene Kreislinie $(x-1)^2 + y^2 = 1, z = x + iy$ bezeichne.**Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2003, T1A3)****a** Es gilt

$$f(z) = -\frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1}.$$

Somit hat f jeweils eine einfache Polstelle bei 1 und -1 sowie eine dreifache bei 0. Gemäß dem im Kasten auf Seite 328 beschriebenen Verfahren berechnen wir für $g(z) = z^3 f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ die Ableitungen

$$g'(z) = \frac{2z}{(1-z^2)^2} \quad \text{und} \quad g''(z) = \frac{2(1-z^2)^2 + 8z^2(1-z^2)}{(1-z^2)^4}.$$

Die Formel liefert sodann

$$\text{Res}(f; 0) = \frac{1}{2!} g''(0) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Für die beiden Residuen bei ± 1 gilt

$$\text{Res}(f; 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{-1}{z^3(z-1)(z+1)} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \text{Res}(f; -1) = -\frac{1}{2}.$$

Zur Berechnung von $\text{Res}(f; \infty)$ bemerken wir, dass die Funktion $\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ wegen

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{z^2} \frac{1}{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{z^2} \cdot \frac{z^5}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z^3}{z^2 - 1} = 0$$

eine hebbare Singularität bei 0 hat. Somit gilt

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = \operatorname{Res}\left(\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right) = 0.$$

b Dies ist eine uns bereits bekannte Funktion. Wir haben die Menge der Nullstellen bereits zu

$$D = \left\{ e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}} \right\}$$

bestimmt (vgl. F14T3A3, Seite 339). Bei der Kurve C handelt es sich um den Rand des Kreises $B_1(1)$. Für Elemente $z \in B_1(1)$ gilt $\operatorname{Re} z > 0$. Somit kommen nur $e^{\frac{i\pi}{4}}$ und $e^{\frac{7i\pi}{4}}$ als umlaufene Singularitäten infrage. Diese liegen auch tatsächlich im Integrationsbereich, es gilt nämlich

$$\left| e^{\frac{i\pi}{4}} - 1 \right| = \left| i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 \right| = \sqrt{2} - \sqrt{2} < 1$$

und ebenso $\left| e^{\frac{7i\pi}{4}} - 1 \right| < 1$. Man berechnet die relevanten Residuen zu

$$\operatorname{Res}\left(f; e^{\frac{i\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4(e^{\frac{i\pi}{4}})^3} = \frac{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}{4} \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}\left(f; e^{\frac{7i\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4(e^{\frac{7i\pi}{4}})^3} = \frac{e^{\frac{3i\pi}{4}}}{4}.$$

Somit erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z^4 + 1} dz &= 2\pi i \left(\frac{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}{4} + \frac{e^{\frac{3i\pi}{4}}}{4} \right) = \frac{\pi i}{2} \left(2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \\ &= \frac{\pi i}{2} (-\sqrt{2}) = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2.3 Satz von Rouché

Aufgabe (Frühjahr 2012, T2A1)

Wie viele Lösungen (mit Vielfachheit gezählt) hat die Gleichung

$$z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + 6z = 1$$

in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ bzw. in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$ bzw. in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}$?

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2012, T2A1)

Die Lösungen obiger Gleichung stimmen mit den Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + 6z - 1$ überein.

Wir bestimmen zunächst die Anzahl der Nullstellen von p in $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Dazu bemerken wir, dass für alle $z \in \partial B_1(0)$ die Abschätzung

$$|z^5 - z^4 + z^3 - z^2 - 1| \leq |z^5| + |z^4| + |z^3| + |z^2| + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

erfüllt ist. Wegen $|6z| = 6$ für alle $z \in \partial B_1(0)$ gilt also

$$|z^5 - z^4 + z^3 - z^2 - 1| < |6z| \quad \text{für alle } z \in \partial B_1(0).$$

Somit können wir den Satz von Rouché anwenden und erhalten, dass das Polynom p in $B_1(0)$ genauso viele Nullstellen hat wie $6z$, d. h. genau eine.

Im Falle $z \in \partial B_3(0)$ haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} | -z^4 + z^3 - z^2 + 6z - 1 | &\leq |z^4| + |z^3| + |z^2| + |6z| + 1 = \\ &= 3^4 + 3^3 + 3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = 136. \end{aligned}$$

Wegen $|z^5| = 3^5 = 243$ für alle $z \in \partial B_3(0)$ bedeutet dies

$$| -z^4 + z^3 - z^2 + 6z - 1 | < |z^5| \quad \text{für alle } z \in \partial B_3(0),$$

d. h. p hat in $B_3(0)$ genauso viele Nullstellen wie z^5 dort hat, nämlich fünf. Da p nach dem Satz von Rouché auf $\partial B_1(0)$ keine Nullstelle hat, ist die Zahl der Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\} = B_3(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ damit $5 - 1 = 4$.

Als Polynom von Grad 5 hat p genau fünf Nullstellen in \mathbb{C} , da diese bereits alle in $B_3(0)$ liegen, kann sich keine mehr im Außengebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}$ befinden.

Aufgabe (Herbst 2012, T1A4)

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ im Ringgebiet $1 \leq |z| \leq 2$. Sind darunter auch reelle Nullstellen?

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2012, T1A4)

Wir bestimmen zunächst die Anzahl der Nullstellen in $B_2(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$. Für alle $z \in \partial B_2(0)$ gilt

$$|-6z^2 + z + 1| \leq 6|z|^2 + |z| + 1 = 24 + 2 + 1 = 27$$

und $|2z^5| = 2 \cdot 2^5 = 64$, also ist $|-6z^2 + z + 1| < |2z^5|$ für alle $z \in \partial B_2(0)$ erfüllt und nach dem Satz von Rouché stimmt die Zahl der Nullstellen von p in $B_2(0)$ mit der Zahl der Nullstellen von $2z^5$ in $B_2(0)$ überein. Dies sind fünf.

Für $z \in \partial B_1(0)$ gilt die Abschätzung

$$|2z^5 + z + 1| \leq |2z^5| + |z| + 1 = 2 + 1 + 1 = 4$$

sowie $|-6z^2| = 6$, d. h. $|2z^5 + z + 1| < |-6z^2|$. Nach dem Satz von Rouché hat daher p in $B_1(0)$ genauso viele Nullstellen wie $-6z^2$, nämlich zwei. Außerdem hat p nach dem Satz von Rouché auf dem Rand $\partial B_1(0)$ keine Nullstellen, sodass p auf $\overline{B_1(0)}$ zwei Nullstellen hat.

Die Zahl der Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\} = B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$ ist deshalb $5 - 2 = 3$. Da auch auf dem Rand von $B_2(0)$ keine Nullstellen liegen können, entspricht das auch der Anzahl der Nullstellen im abgeschlossenen Ringgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| \leq 2\}$.

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine komplexe Nullstelle von p und \bar{w} ihr komplex konjugiertes. Es ist dann $w \neq \bar{w}$ und es gilt

$$p(\bar{w}) = 2\bar{w}^5 - 6\bar{w}^2 + \bar{w} + 1 = \overline{2w^5 - 6w^2 + w + 1} = \overline{p(w)} = \bar{0} = 0,$$

sodass auch \bar{w} eine Nullstelle von p sein muss. Dies zeigt, dass die echt-komplexen Nullstellen von p in komplex konjugierten Paaren auftreten. Da p jedoch eine ungerade Anzahl von Nullstellen in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| \leq 2\}$ besitzt, muss darunter mindestens eine reelle Nullstelle sein.

2.4 Biholomorphe Abbildungen

Aufgabe (Herbst 2010, T1A3)

Konstruieren Sie eine gebrochen-rationale Abbildung (Möbiustransformation) f , die die Kreisscheibe $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| < 2\}$ auf die obere Halbebene $H := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) > 0\}$ abbildet. Ist eine solche Abbildung eindeutig bestimmt?

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2010, T1A3)

Wir wählen drei Punkte z_j auf dem Rand von K und drei Punkte w_j auf dem Rand von H , beispielsweise

$$z_1 = -3, z_2 = 1, z_3 = -1 + 2i \quad \text{und} \quad w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 1.$$

Nun lösen wir die Doppelverhältnisgleichung

$$\frac{z+3}{z+(1-2i)} \cdot \frac{1+1-2i}{1+3} = \frac{w+1}{w-1} \cdot \frac{-1}{1}$$

nach w auf und erhalten

$$w = \frac{(-1-i)z + (1+i)}{(3-i)z + (5-7i)}.$$

Für die Nullstelle des Nenners ergibt sich $z_0 = -\frac{5-7i}{3-i} = -\frac{11}{5} + \frac{8}{5}i$. Ferner gilt

$$\left| -\frac{11}{5} + \frac{8}{5}i + 1 \right| = \left| -\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i \right| = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{64}{25}} = 2,$$

sodass diese auf ∂K liegt. Definieren wir also die Möbiustransformation

$$f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{(-1-i)z + (1+i)}{(3-i)z + (5-7i)} & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \\ \infty & \text{falls } z = z_0, \\ \frac{-1-i}{3-i} = \frac{-(1+2i)}{5} & \text{falls } z = \infty. \end{cases}$$

Diese bildet nach Konstruktion die Kreislinie ∂K nach ∂H ab. Damit wird K auf

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \quad \text{oder} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$$

abgebildet. Wegen

$$f(-1) = \frac{1+i+1+i}{-3+i+5-7i} = \frac{2+2i}{2-6i} = \frac{-1+2i}{5} \in H$$

ist ersteres der Fall. Die Einschränkung $f|_K$ liefert damit eine Abbildung mit den verlangten Eigenschaften.

Eine solche Abbildung ist *nicht* eindeutig bestimmt. Zwar ist eine Abbildung durch die drei Punkte eindeutig bestimmt. Wenn bei den obigen Bedingungen jedoch für w_3 anstelle von 1 das Element $2 \in \partial H$ gewählt worden wäre, so hätte man eine Möbiustransformation g erhalten, die ebenfalls K biholomorph auf H abbildet. Wegen $f(0) \neq g(0)$ ist jedoch $f \neq g$.

Aufgabe (Frühjahr 2009, T1A3)

Gegeben sei das Gebiet $G := \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \geq 0\}$. Auf welches der folgenden Gebiete lässt sich G biholomorph abbilden?

a $\{w \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;

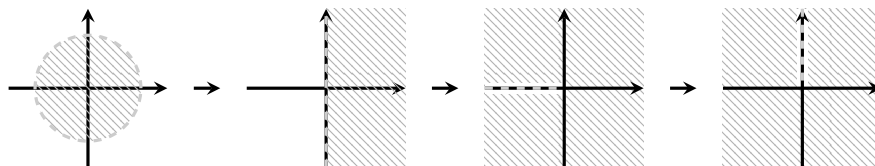
b $\{w \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Man gebe im Falle der Existenz jeweils eine solche Abbildung an.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2009, T1A3)

- a** Die Menge G ist ein sternförmiges Gebiet und somit einfach zusammenhängend. Bei der angegebenen Menge handelt es sich um die Einheitskreisscheibe, sodass laut dem Riemannsches Abbildungssatz eine solche biholomorphe Abbildung existiert.

Zur Konstruktion der Abbildung gehen wir in mehreren Schritten vor, wie die folgende Abbildung veranschaulicht.



Wir transformieren zunächst den Einheitskreis mittels einer Möbiustransformation f auf die rechte Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Man wählt sich hierzu wie oben drei Punkte auf dem Rand und erhält (für die Wahl $f(1) = -i, f(-1) = i, f(i) = \infty$)

$$f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto \frac{1 - iz}{1 + iz}.$$

Die Halbebene \mathbb{H} bilden wir nun in einem zweiten Schritt auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ ab. Wir zeigen hierzu, dass

$$g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0], \quad z \mapsto z^2$$

eine biholomorphe Abbildung ist. Die Holomorphie ist als Polynomfunktion klar. Zudem sei bemerkt, dass für $z \in \mathbb{H}$ gilt, dass $z^2 \notin]-\infty, 0]$ (sonst müsste $\operatorname{Re} z = 0$ gelten.)

Für die *Injektivität* betrachte $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{H}$ mit $g(z_1) = g(z_2)$. Es folgt

$$z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow z_1^2 - z_2^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = 0$$

Nehmen wir an, es wäre $z_1 + z_2 = 0$, also $z_1 = -z_2$. Wegen $z_1 \in \mathbb{H}$ würde aber folgen $\operatorname{Re} z_2 = -\operatorname{Re} z_1 < 0$, also $z_2 \notin \mathbb{H}$ – Widerspruch. Also muss $z_1 = z_2$ gelten.

Für die *Surjektivität* sei $w \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ vorgegeben. Schreibe $w = re^{i\varphi}$ mit $r = |w|$ und $\varphi \in]-\pi, \pi[$. Dann gilt (wegen $\cos x > 0$ für $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$)

$$\operatorname{Re} \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{r} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) > 0 \quad \text{und} \quad \left(\sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)^2 = re^{i\varphi} = w.$$

Zu guter Letzt fehlt nur noch eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn. Dies bewerkstelligt die Abbildung

$$h : \mathbb{C} \setminus]-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \geq 0\}, \quad z \mapsto -iz.$$

Für diese ist die Biholomorphie klar.

Insgesamt erhalten wir die gesuchte Abbildung durch $\psi = h \circ g \circ f$. Explizit gilt

$$\psi : \mathbb{E} \rightarrow G, \quad z \mapsto -i \left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)^2.$$

Die inverse Abbildung $G \rightarrow \mathbb{E}$ erhält man durch Berechnung von $f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= f^{-1}(g^{-1}(h^{-1}(z))) = f^{-1}(g^{-1}(iz)) = f^{-1}(\sqrt{iz}) = \\ &= \frac{1}{-2i} \cdot \frac{1 - \sqrt{iz}}{i + i\sqrt{iz}}, \end{aligned}$$

wobei wir die Umkehrabbildung von f wie in früheren Aufgaben bestimmt haben.

- b** Eine solche Abbildung existiert nicht. Wir haben bereits bemerkt, dass G einfach zusammenhängend ist, also auch das Bild von G unter einer biholomorphen Abbildung einfach zusammenhängend sein muss. Wir zeigen, dass dies für $\{w \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ nicht der Fall ist. Hierzu lässt sich beispielsweise bemerken, dass das Komplement $\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} = \bar{\mathbb{E}}$ beschränkt ist.

2.5 Ebene Systeme

Aufgabe (Herbst 2008, T3A3)

Betrachtet wird das ebene System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x\end{aligned}$$

um den Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$.

- a** Finden sie ein stetig differenzierbares $H = H(x, y)$, das auf den Lösungen des Systems konstant ist.

Hinweis Suchen Sie ein H mit $\dot{x} = H_y, \dot{y} = -H_x$. Warum ist H dann konstant auf den Lösungen des Systems?

- b** Begründen Sie anschaulich, warum die Lösungskurven $(x(t), y(t))$ in der Nähe von $(0, 0)$ geschlossen sind.

Hinweis Untersuchen Sie H auf Extrema.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2008, T3A3)

- a** Man überprüft schnell, dass die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist und begibt sich direkt auf die Suche nach einer Hamilton-Funktion. Mittels doppelter Integration oder etwas Probieren findet man

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x \quad \text{mit} \quad \partial_x H(x, y) = \sin x, \quad \partial_y H(x, y) = y.$$

Ist $(x(t), y(t))$ eine Lösung des Systems, so gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}y^2(t) - \cos x(t) \right) = y(t)y'(t) + \sin x(t)x'(t) = \\ &= y(t)(-\sin x(t)) + \sin x(t)y(t) = 0.\end{aligned}$$

Damit ist H entlang der Trajektorien von Lösungen konstant.

- b** Der Gradient von H ist gegeben durch

$$(\nabla H)(x, y) = \begin{pmatrix} \sin x \\ y \end{pmatrix}$$

und verschwindet in den Punkten $(k\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Hesse-Matrix ist

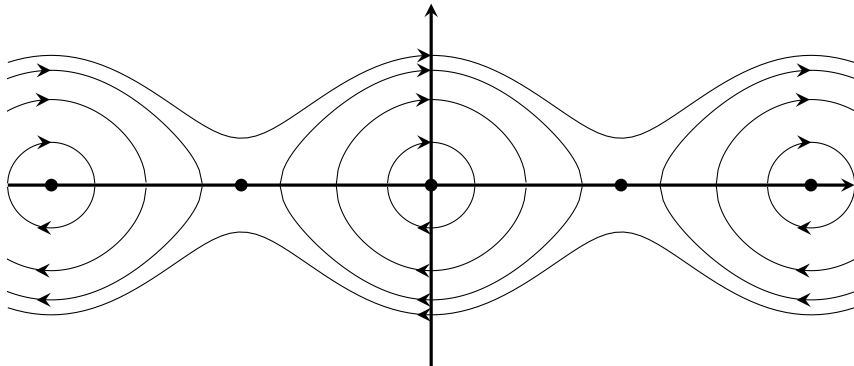
$$(\mathcal{H}H)(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $(0,0)$ ist $(\mathcal{H}H)(x,y) = \mathbb{E}_2$, also positiv definit, sodass $(0,0)$ ein striktes lokales Minimum von H ist. Anschaulich gesehen bildet H in der Nähe von $(0,0)$ also einen Krater mit tiefstem Punkt $(0,0)$. Die Niveaumengen

$$N_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) = c\}$$

sind in der Nähe der Ruhelage $(0,0)$ daher in etwa kreisförmig und geschlossen. Jede dieser Niveaumengen ist eine disjunkte Vereinigung von Trajektorien. Trajektorien können allgemein nur die Form einer Ruhelage, geschlossenen Kurve oder doppeltpunktfreien Kurve ohne ihre Endpunkte annehmen. Falls also nicht die gesamte Menge N_c einer Trajektorie entspricht, müsste sie in Kurven ohne ihre Endpunkte zerfallen. Anschaulich gesprochen bleibt dabei jedoch immer ein Punkt „übrig“, der auf keiner Trajektorie liegt. Dieser wäre dann wieder eine Ruhelage. Da wir unsere Betrachtungen nur auf eine Umgebung von $(0,0)$ beschränken, ist $(0,0)$ dort die einzige Ruhelage. Also muss die gesamte Menge N_c bereits von einer (geschlossenen) Trajektorie eingenommen werden.

Das Phasenportrait sieht wie folgt aus:



3 Algebra: Aufgabenlösungen nach Jahrgängen

Prüfungstermin: Frühjahr 2015

Thema Nr. 1 (Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → siehe Buch S. 238 8 + 8 Punkte

Sei \mathbb{F}_2 der endliche Körper mit genau zwei Elementen 0 und 1. Auf dem dreidimensionalen \mathbb{F}_2 -Vektorraum $(\mathbb{F}_2)^3$ betrachten wir den Endomorphismus

$$\phi: (\mathbb{F}_2)^3 \rightarrow (\mathbb{F}_2)^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1).$$

- a** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von ϕ . Bestimmen Sie alle Eigenwerte von ϕ in \mathbb{F}_2 . Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von ϕ in \mathbb{F}_2 eine Basis des zugehörigen Eigenraums.
- b** Gibt es eine Basis von $(\mathbb{F}_2)^3$, bezüglich derer ϕ eine Jordan'sche Normalform hat? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja, bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von ϕ .

Aufgabe 2 → siehe Buch S. 96 4 Punkte

Sei $m \geq 3$ eine ungerade ganze Zahl. Zeigen Sie die folgende Kongruenz:

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (m-3)^m + (m-2)^m + (m-1)^m \equiv 0 \pmod{m}$$

Aufgabe 3 → S. 5 6 + 6 Punkte

Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:

- a** G hat einen Normalteiler N mit $|N| = 5$ oder $|N| = 7$.
- b** G ist auflösbar.

Aufgabe 4 → siehe Buch S. 102

6 + 6 Punkte

Sei J das von $X^3 - 7$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[X]$.

- a** Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}[X]/J$ ein Körper ist, und bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[X]/J \supseteq \mathbb{Q}$.
- b** Bestimmen Sie ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$, für das $P + J$ multiplikatives Inverses von $(X^2 + 1) + J$ in $\mathbb{Q}[X]/J$ ist.

Aufgabe 5 → siehe Buch S. 174

8 + 8 Punkte

Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei K ein Zerfällungskörper von f . Sei $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ die zugehörige Galois-Gruppe.

- a** Beweisen Sie: Falls G eine abelsche Gruppe ist, hat sie die Ordnung n .
- b** Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$, wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ ist. Bestimmen Sie ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$, dessen Zerfällungskörper K ist. Beweisen Sie, dass $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ abelsch, aber nicht zyklisch ist.

Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → siehe Buch S. 98

10 Punkte

Man bestimme alle Paare von Primzahlen p, q mit $p^2 - 2q^2 = 1$.

Aufgabe 2 → S. 27

10 Punkte

Es sei $f(X) \in K[X]$ ein nicht konstantes Polynom ohne mehrfache Nullstellen in einem Zerfällungskörper. Man zeige, dass $f(X)$ ein Teiler des Polynoms $f(X + f(X))$ ist.

Aufgabe 3 → siehe Buch S. 142

12 Punkte

Sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ keine p -te Potenz in \mathbb{Z} . Man zeige, dass das Polynom $X^p - a$ über \mathbb{Q} irreduzibel ist.

Hinweis Betrachte die Nullstellen von $X^p - a$ in \mathbb{C} und untersuche den konstanten Term eines echten Teilers von $X^p - a$ auf Ganzzahligkeit.

Aufgabe 4 → siehe Buch S. 26

8 + 10 Punkte

- a** Die Gruppe G operiere transitiv auf einer Menge Ω mit $|\Omega| > 1$. Man zeige: Hat jedes Element aus G mindestens einen Fixpunkt, dann ist G eine Vereinigung der Konjugierten hUh^{-1} , $h \in G$ mit einer echten Untergruppe U von G .
- b** Für $n > 1$ sei $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über den komplexen Zahlen. Man gebe eine echte Untergruppe U von G an, so dass G die Vereinigung der Konjugierten von U ist. **Hinweis** Betrachte die Operation auf den 1-dimensionalen Unterräumen von \mathbb{C}^n .

Aufgabe 5 → siehe Buch S. 203

10 Punkte

Sei p eine Primzahl und $q = p^n$, $n > 0$. Weiter sei K ein Körper der Charakteristik p . Zeigen Sie, dass die Nullstellen des Polynoms $f(X) = X^q - X$ einen Unterkörper von K bilden.

Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → siehe Buch S. 3

8 Punkte

Gegeben seien eine Gruppe G und drei Untergruppen $U_1, U_2, V \subseteq G$ mit der Eigenschaft $V \subseteq U_1 \cup U_2$. Zeigen Sie, dass $V \subseteq U_1$ oder $V \subseteq U_2$ gilt.

Aufgabe 2 → siehe Buch S. 58

12 Punkte

Seien p, q, r Primzahlen mit $p < q < r$ und $pq < r + 1$. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung pqr auflösbar ist.

Aufgabe 3 → siehe Buch S. 74

4 + 4 + 4 Punkte

Ein Ring R mit Eins heißt *idempotent*, wenn $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$ gilt. Beweisen Sie:

- a** $-1 = 1$ in R .
- b** Jeder idempotente Ring ist kommutativ.
- c** Jeder idempotente Integritätsbereich ist isomorph zu \mathbb{F}_2 , dem Körper mit zwei Elementen.

Aufgabe 4 → siehe Buch S. 148

4 + 6 + 6 Punkte

Im Folgenden ist jeweils L/K eine Körpererweiterung und ein Element $\alpha \in L$ gegeben. Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von α über dem Grundkörper K (mit Nachweis!).

a $K = \mathbb{Q}, L = \mathbb{C}$ und $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

b $K = \mathbb{F}_3, L = \overline{\mathbb{F}}_3$ ein algebraischer Abschluss von \mathbb{F}_3 und α eine Nullstelle von $X^6 + 1$.

c $K = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}), L = \mathbb{Q}(\zeta)$ und $\alpha = \zeta \in \mathbb{C}$ eine p -te Einheitswurzel. wobei $p \geq 3$ eine Primzahl bezeichne.

Aufgabe 5 → siehe Buch S. 191

12 Punkte

Es sei eine Galoiserweiterung E/K mit zyklischer Galois-Gruppe gegeben, so dass $[E : K] = p^n$ gilt mit einer Primzahl p und $n \geq 1$. Weiter sei $K \subset F \subset E$ ein Zwischenkörper mit $[F : K] = p^{n-1}$. Zeigen Sie: Jedes Element von $E \setminus F$ ist ein primitives Element von E über K .

Lösungen zu Thema Nr. 1

Alle Lösungen aus diesem Thema wurden bereits in früheren Kapiteln des Buches behandelt.

Lösungen zu Thema Nr. 2

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T2A2)

Zu zeigen ist $f(X + f) \equiv 0 \pmod{f}$. Sei dazu $f = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in K$, dann ist wegen $X + f \equiv X \pmod{f}$ auch

$$f(X + f) = \sum_{k=0}^n a_k (X + f)^k \equiv \sum_{k=0}^n a_k X^k \equiv f \equiv 0 \pmod{f}.$$

Lösungen zu Thema Nr. 3

Alle Lösungen aus diesem Thema wurden bereits in früheren Kapiteln des Buches behandelt.

Prüfungstermin: Herbst 2015

Thema Nr. 1 (Aufabengruppe)

Aufgabe 1 → siehe Buch S. 100 8 Punkte

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung $x^6 - 2x + 4 = 0$ im Ring $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$.

Hinweis Führen Sie eine Fallunterscheidung je nach Bild von x in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch und beachten Sie, dass $64 = 2^6$.

Aufgabe 2 → siehe Buch S. 215 4 + 4 Punkte

Sei \mathbb{F}_q der endliche Körper mit q Elementen.

- a** Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Anzahl der eindimensionalen \mathbb{F}_q -Untervektorräume von \mathbb{F}_q^n gleich $\frac{q^n - 1}{q - 1}$ ist.
- b** Zeigen Sie, dass die Anzahl der zweidimensionalen Untervektorräume von \mathbb{F}_q^3 gleich der Anzahl der eindimensionalen Untervektorräume von \mathbb{F}_q^3 ist.
- c** Wie viele Zerlegungen von \mathbb{F}_q^3 in direkte Summen von \mathbb{F}_q -Untervektorräumen $V_1 \oplus V_2$ gibt es mit $\dim_{\mathbb{F}_q}(V_1) = 2$?

Aufgabe 3 → siehe Buch S. 47 8 Punkte

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie sämtliche endliche Gruppen G der Ordnung $143 = 11 \cdot 13$.

Aufgabe 4 → S. 32 2 + 2 + 4 + 4 Punkte

Sei $P(X)$ das Polynom $X^3 - X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

- a** Das Bild von $P(X)$ in $\mathbb{F}_3[X]$ ist irreduzibel.
- b** Das Polynom $P(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.
- c** Das Polynom $P(X)$ hat genau eine reelle Nullstelle.
- d** Die Galois-Gruppe des Zerfällungskörpers L von $P(X)$ über \mathbb{Q} ist isomorph zu S_3 .

Aufgabe 5 → S. 33

4 + 4 + 6 + 6 Punkte

Sei $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ eine primitive fünfte Einheitswurzel, $\zeta_7 \in \mathbb{C}$ eine primitive siebte Einheitswurzel und $u = \zeta_7 + \zeta_7^{-1}$. Zeigen Sie:

a $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}(u)] = 2,$

b $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3,$

c $[\mathbb{Q}(u, \zeta_5) : \mathbb{Q}] = 12.$

d Die Galois-Gruppe $\text{Gal}(\mathbb{Q}(u, \zeta_5)/\mathbb{Q})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 34

6 Punkte

Bestimmen Sie alle Matrizen A in $\text{GL}_2(\mathbb{C})$, die mit der Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kommutieren.

Aufgabe 2 → siehe Buch S. 62

14 Punkte

Wieviele Elemente der Ordnung 15 gibt es in der symmetrischen Gruppe S_8 ?

Aufgabe 3 → S. 35

14 Punkte

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ die wie folgt rekursiv definierte Folge ganzer Zahlen

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \text{ für } n \geq 0.$$

Sei $N \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Ist N ein Teiler von a_n , dann teilt N auch a_{kn} für alle $k \geq 2$.

Aufgabe 4 → siehe Buch S. 147

12 Punkte

Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K . Sei f das Minimalpolynom von α über K und g das Minimalpolynom von β über K . Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $K(\beta)$ ist genau dann, wenn g irreduzibel über $K(\alpha)$ ist.

Aufgabe 5 → siehe Buch S. 176

6 + 8 Punkte

Sei $\xi = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

- a** Berechnen Sie das Minimalpolynom $m(X)$ von ξ über \mathbb{Q} .
- b** Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ Galois'sch ist und berechnen Sie die Galois-Gruppe.

Thema Nr. 3 (Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → siehe Buch S. 99

12 Punkte

Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + y^2 = z^2$. Zeigen Sie, dass das Produkt xyz durch 60 teilbar ist.

Aufgabe 2 → S. 35

15 Punkte

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Es bezeichne $\varphi(n)$ den Wert der Euler'schen φ -Funktion bei n . Zeigen Sie, dass es genau $\varphi(n)$ verschiedene injektive Gruppenhomomorphismen $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 3 → siehe Buch S. 230

4 + 6 + 5 Punkte

Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$.

- a** Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{F}_5[X]/(f(X))$ ein Körper mit 25 Elementen ist.
- b** Bestimmen Sie ein Element $w \in K$, mit $w^2 = 2$.
- c** Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{F}_5)$$

über K diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4 → siehe Buch S. 198

5 + 5 + 5 + 3 Punkte

Es sei $p \geq 3$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, so dass $X^p - a$ irreduzibel über \mathbb{Q} ist. Ferner sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p -te Einheitswurzel, $\alpha \in \mathbb{C}$ eine beliebige Nullstelle von $X^p - a$ und $Z := \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$.

- a** Zeigen Sie, dass Z ein Zerfällungskörper von $X^p - a$ ist und $[Z : \mathbb{Q}] = p(p - 1)$ gilt.

- b** Zeigen Sie, dass $\text{Gal}(\mathbb{Z}|\mathbb{Q})$ eine p -Sylowgruppe H besitzt, die ein Normalteiler ist, und dass

$$\text{Gal}(\mathbb{Z}|\mathbb{Q})/H \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

gilt.

- c** Bestimmen Sie einen Gruppenisomorphismus $\text{Gal}(\mathbb{Z}|\mathbb{Q}(\alpha)) \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.
- d** Zeigen Sie, dass $\text{Gal}(\mathbb{Z}|\mathbb{Q})$ mehr als eine 2-Sylowgruppe besitzt.

Lösungen zu Thema Nr. 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T1A4)

- a** Wegen $\text{grad } P(X) = 3$ genügt es zu zeigen, dass $P(X)$ keine Nullstellen in \mathbb{F}_3 hat. Dazu berechnen wir

$$P(0) = \bar{2}, \quad P(\bar{1}) = \bar{1} - \bar{1} + \bar{2} = \bar{2}, \quad P(\bar{2}) = -\bar{1} + \bar{1} + \bar{2} = \bar{2}.$$

- b** Das folgt direkt aus dem Reduktionskriterium.

- c** Es gilt

$$P(-1) = 2 > 0, \quad P(-2) = -8 + 2 + 2 = -4 < 0.$$

Damit hat P aufgefasst als Polynomfunktion $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x)$ laut dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $] -2, -1[$. Um auszuschließen, dass es weitere Nullstellen gibt, betrachten wir die erste Ableitung $p'(x) = 3x^2 - 1$. Für diese gilt

$$p'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm c \quad \text{für } c = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Damit ist p für $x < -c$ streng monoton steigend, sodass in diesem Bereich nur eine Nullstelle (die oben gefundene) vorkommen kann. Im Bereich $-c < x < c$ ist p wegen $p'(x) < 0$ streng monoton fallend. Jedoch erhalten wir hier wegen $p(c) > 0$ keine weitere Nullstelle. Für $x > c$ ist p wiederum monoton steigend, sodass sich auch hier keine Nullstelle ergibt. Insbesondere hat P keine weitere reelle Nullstelle.

- d** Gemäß Satz 3.24 ist $\text{Gal}(P) = G_{L|\mathbb{Q}}$ zumindest isomorph zu einer Untergruppe von S_3 . Wir zeigen, dass $|\text{Gal}(P)| = [L : \mathbb{Q}] > 3$ ist, wobei L ein Zerfällungskörper von P ist. Sei α die reelle Nullstelle aus Teil **c**. Dann ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zwischenkörper von $L|\mathbb{Q}$ mit Erweiterungsgrad 3. Nehmen wir nun an, $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dann wäre $L \subseteq \mathbb{R}$, im Widerspruch dazu, dass laut Teil **c** zwei der Nullstellen nicht-reell sind. Damit ist $\text{Gal}(P)$ isomorph zu einer Untergruppe von S_3 , deren Ordnung größer als 3 ist. Dies ist nur für $\text{Gal}(P) \cong S_3$ möglich.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T1A5)

a Wegen $\zeta_7 = e^{\frac{2\pi ik}{7}}$ für ein $k \in \{1, \dots, 6\}$ ist

$$u = \zeta_7 + \zeta_7^{-1} = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{7}\right)$$

und somit $\mathbb{Q}(u) \subseteq \mathbb{R}$. Insbesondere folgt wegen $\zeta_7 \notin \mathbb{R}$ auch $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}] > 1$. Betrachten wir nun

$$f = (X - \zeta_7)(X - \zeta_7^{-1}) = X^2 - (\zeta_7 + \zeta_7^{-1})X + 1 = X^2 - uX + 1 \in \mathbb{Q}(u)[X],$$

so stellen wir fest, dass f ein Polynom mit $f(\zeta_7) = 0$ ist, und somit $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}(u)] \leq 2$. Insgesamt folgt aus beiden Ungleichungen die Behauptung.

b Nach Definition ist das Minimalpolynom von ζ_7 das siebte Kreisteilungspolynom Φ_7 ist. Es gilt daher laut Satz 3.17, dass

$$[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}] = \text{grad } \Phi_7 = \varphi(7) = 6.$$

Mit der Gradformel und Teil **a** folgt nun

$$[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = \frac{[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}(u)]} = \frac{6}{2} = 3.$$

c Der Körper $\mathbb{Q}(u)$ ist laut Teil **b** ein Zwischenkörper der Erweiterung von Grad 3 über \mathbb{Q} . Der Körper $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ ist ein Zwischenkörper, für dessen Grad

$$[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = \text{grad } \Phi_5 = \varphi(5) = 4$$

gilt. Insgesamt wird laut der Gradformel also der Erweiterungsgrad sowohl von 4 als auch von 3 geteilt und ist somit ein Vielfaches von $\text{kGV}(3, 4) = 12$. Zugleich ist aber Φ_5 ein Polynom in $\mathbb{Q}(u)[X]$ mit $\Phi_5(\zeta_5) = 0$. Das Minimalpolynom von ζ_5 über diesem Körper muss also ein Teiler von Φ_5 sein und insbesondere vom Grad ≤ 4 sein. Damit gilt auch

$$[\mathbb{Q}(u, \zeta_5) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(u, \zeta_5) : \mathbb{Q}(u)] \cdot [\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] \leq 4 \cdot 3 = 12.$$

Beide Abschätzungen zusammen ergeben die gewünschte Gleichheit.

d Nach Proposition 3.18 ist $\mathbb{Q}(\zeta_7) | \mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung mit zyklischer Galois-Gruppe. Insbesondere ist jede Untergruppe ein Normalteiler, sodass jede Zwischenerweiterung nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie daher jede Zwischenerweiterung galoissch ist. Folglich ist auch $\mathbb{Q}(u) | \mathbb{Q}$

eine Galois-Erweiterung. Da $|G_{\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q}}| = [\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$ eine Primzahl ist, ist außerdem $G_{\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aus Satz 3.18 folgt genauso, dass $\mathbb{Q}(\zeta_5) | \mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $G_{\mathbb{Q}(\zeta_5)|\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist. Nach Satz 3.23 ist daher auch $\mathbb{Q}(u, \zeta_5) | \mathbb{Q}$ galoissch und es gibt einen injektiven Homomorphismus

$$G_{\mathbb{Q}(u, \zeta_5)|\mathbb{Q}} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q}} \times G_{\mathbb{Q}(\zeta_5)|\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$

Unter Verwendung von Teil **b** ist $|G_{\mathbb{Q}(u, \zeta_5)|\mathbb{Q}}| = 12$, sodass dieser Homomorphismus bereits ein Isomorphismus sein muss.

Lösungen zu Thema Nr. 2

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T2A1)

Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} AX = XA &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und erhalten daraus die Gleichungen

$$a = a + c, \quad a + b = b + d, \quad c = c, \quad c + d = d.$$

Die erste (und die letzte) Gleichung ist äquivalent zu $c = 0$, die zweite Gleichung zu $a = d$. Die Menge, der Matrizen, die mit X kommutieren, ist daher durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{C})$$

gegeben.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T2A3)

Nach Berechnung der ersten paar Werte stellt man folgende Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ und $l \geq 0$ auf:

$$a_{n+l} \equiv a_l \pmod{N}.$$

Im Fall $l = 0$ ist die Aussage natürlich klar. Für den Induktionsschritt setzen wir die Aussagen für $l \geq 0$ voraus und erhalten

$$a_{n+(l+1)} \equiv a_{n+l}^2 + 1 \stackrel{(I.V.)}{\equiv} a_l^2 + 1 \equiv a_{l+1} \pmod{N}.$$

Daraus erhalten wir für beliebiges $k \geq 2$, dass $a_{kn} \equiv a_n \pmod{N}$ – wie man zur Not durch eine weitere Induktion zeigt. Insgesamt folgt für $k \geq 2$

$$a_{kn} \equiv a_n \equiv 0 \pmod{N}$$

und damit ist N ein Teiler von a_{kn} .

Lösungen zu Thema Nr. 3**Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T3A2)**

Ein Homomorphismus $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist durch das Bild von $\bar{1}$ bereits eindeutig bestimmt. Laut Proposition 1.24 existiert für jedes Element $q + \mathbb{Z}$ mit $\text{ord}(q + \mathbb{Z}) \mid n$ ein solcher Homomorphismus.

Wir zeigen nun zunächst, dass ein solcher Homomorphismus genau dann injektiv ist, wenn das Element $q + \mathbb{Z} = f(\bar{1})$ die Ordnung n hat.

„ \Rightarrow “: Da f ein Homomorphismus ist, muss die Ordnung von $q + \mathbb{Z}$ auf jeden Fall $\text{ord } \bar{1} = n$ teilen. Nehmen wir an, es gibt einen Teiler $k < n$, so dass $k \cdot f(\bar{1}) = 0$. Dann wäre jedoch $f(\bar{k}) = k \cdot f(\bar{1}) = 0$ und damit $\bar{k} \in \ker f$, aber $\bar{k} \neq \bar{0}$, im Widerspruch dazu, dass f injektiv ist.

„ \Leftarrow “: Angenommen, $q + \mathbb{Z}$ hat die Ordnung n . Dann gilt:

$$f(\bar{b}) = 0 \Leftrightarrow bf(\bar{1}) = 0 \Leftrightarrow b(q + \mathbb{Z}) = 0 \Leftrightarrow n \mid b \Leftrightarrow \bar{b} = 0.$$

Es genügt also, zu zeigen, dass es in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} genau $\varphi(n)$ Elemente der Ordnung n gibt. Wir zeigen dazu, dass genau die Elemente der Form $\frac{a}{n} + \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, n) = 1$ Ordnung n haben.

„ \Rightarrow “: Sei $\frac{a}{n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dann ist zunächst $n\frac{a}{n} = a \in \mathbb{Z}$, also ist $\text{ord} \frac{a}{n} + \mathbb{Z}$ ein Teiler von n . Sei k ein echter Teiler von n , dann ist $n = k \cdot n'$ für $n' \neq \pm 1$ und somit

$$k\frac{a}{n} = k\frac{a}{kn'} = \frac{a}{n'} \notin \mathbb{Z},$$

denn wegen $\text{ggT}(a, n) = 1$ ist n' kein Teiler von a .

„ \Leftarrow “: Sei $\frac{r}{s} + \mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung n , wobei wir o. B. d. A. annehmen, dass der Bruch $\frac{r}{s}$ vollständig gekürzt ist. Es ist dann $n \cdot \frac{r}{s} \in \mathbb{Z}$, also $n = sk$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Damit haben wir $\frac{r}{s} = \frac{kr}{n}$. Nehmen wir nun an, es gibt einen echten gemeinsamen Teiler $d \neq \pm 1$ von kr und n . Dann kürzen wir den Bruch mit dieser Zahl und erhalten $\frac{n}{d} \cdot \frac{kr}{n} \in \mathbb{Z}$, im Widerspruch zu Ordnung $\text{ord}(\frac{r}{s} + \mathbb{Z}) = n$.

Insgesamt haben wir damit die $\varphi(n)$ Elemente der Form $\frac{a}{n} + \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, n) = 1$ und laut dem ersten Teil gibt es genauso viele injektive Homomorphismen f .

Prüfungstermin: Frühjahr 2016

Thema Nr. 1 (Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 42

12 Punkte

Es sei f ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraums \mathbb{R}^n , und es sei M die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis von \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind:

- a** f ist eine Orthogonalprojektion auf einen Unterraum der Dimension k .
- b** Die Matrix M ist idempotent (d. h. $M^2 = M$), symmetrisch und hat Spur k .

Aufgabe 2 → S. 44

8 Punkte

Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^n k^2$ genau dann durch n teilbar ist, wenn n weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist.

Hinweis $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$.

Aufgabe 3 → S. 44

16 Punkte

Es sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe, und es sei (H, \cdot) eine Gruppe mit einem Normalteiler $N \trianglelefteq H$ vom Index 2. Zeigen Sie:

- a** Sind $x, y \in H \setminus N$, dann ist $xy \in N$.
- b** Die auf $A \times H$ definierte Verknüpfung

$$(a, x) \circledast (b, y) := \begin{cases} (a + b, xy), & \text{falls } x \in N, \\ (a - b, xy), & \text{falls } x \in H \setminus N, \end{cases}$$

ist assoziativ.

Im Folgenden darf ohne Beweis verwendet werden, dass $A \times H$ mit dieser Verknüpfung eine Gruppe mit neutralem Element $(0_A, 1_H)$ bildet.

- a** Ist $x \in H \setminus N$ ein Element der Ordnung 2, und ist $a \in A$, dann hat (a, x) in der Gruppe $(A \times H, \circledast)$ die Ordnung 2.
- b** Es gibt eine Gruppe der Ordnung 42, die weder ein Element der Ordnung 6 noch ein Element der Ordnung 14 enthält.

Aufgabe 4 → S. 45

12 Punkte

Es seien $1 < D \in \mathbb{Z}$ und $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-D}]$.

a Zeigen Sie: Die Einheitengruppe von R ist $R^* = \{\pm 1\}$.

Ferner sei $D := 13$.

a Zeigen Sie, dass 2 und $1 + \sqrt{-13}$ in R irreduzibel sind.

b Zeigen Sie, dass $2 \in R$ kein Primelement ist.

Hinweis Man benutze die Normabbildung $N(a + b\sqrt{-D}) = a^2 + Db^2$.

Aufgabe 5 → S. 46

12 Punkte

Für eine primitive Einheitswurzel in \mathbb{C} gilt die Formel

$$\zeta_5 := e^{\frac{2\pi i}{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}};$$

diese Formel kann im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.

a Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha := \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$ über \mathbb{Q} .

b Zeigen Sie: $i \notin \mathbb{Q}(\zeta_5)$.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 47

14 Punkte

a Sei p eine Primzahl und \mathbb{F}_p der Körper mit p Elementen. Die Menge

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_p, a \neq 0 \right\}$$

ist eine Untergruppe der $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ (Nachweis nicht erforderlich). Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

b Sei nun G eine beliebige Gruppe der Ordnung $p(p-1)$. Zeigen Sie, dass es genau eine Untergruppe H von G der Ordnung p gibt. Zeigen Sie weiter, dass G genau dann auflösbar ist, wenn G/H auflösbar ist.

c Sei $C = (\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}) \times A_5$ das direkte Produkt der zyklischen Gruppe der Ordnung 61 und der alternierenden Gruppe A_5 . Ist C auflösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 → S. 48

12 Punkte

Sei

$$R := \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad i^2 = -1,$$

der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Sei

$$I := \mathbb{Z} \cdot 25 + \mathbb{Z}(7 + i) = \{25x + y(7 + i) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Menge I ist ein Ideal in R (Nachweis nicht erforderlich).

- a** Zeigen Sie, dass $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow R/I, a \mapsto a + I$ surjektiv ist und bestimmen Sie den Kern von φ .
- b** Zeigen Sie, dass die Gruppe $(R/I)^\times$ der Einheiten von R/I zyklisch von der Ordnung 20 ist.
- c** Wie viele verschiedene Erzeuger von $(R/I)^\times$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 → S. 49

12 Punkte

Sei

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 14 \in \mathbb{Q}[x].$$

- a** Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3 + \sqrt{23}}, \sqrt{-14})$ der Zerfällungskörper von f ist.
- b** Zeigen Sie: $[K : \mathbb{Q}] = 8$.

Aufgabe 4 → S. 49

12 Punkte

Sei

$$f(x) := x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$$

und $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f . Sei $b := 2a^2 - a - 2$.

- a** Zeigen Sie, dass f irreduzibel über \mathbb{Q} ist.
- b** Zeigen Sie, dass $b \neq 0$ gilt.
- c** Bestimmen Sie das Minimalpolynom von a^2 über \mathbb{Q} .

Aufgabe 5 → S. 50

10 Punkte

Es sei $M_4(\mathbb{Q})$ der Ring der 4×4 -Matrizen mit Einträgen in \mathbb{Q} . Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

- a** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$ sowie die Eigenwerte von A . Ist A diagonalisierbar?
- b** Berechnen Sie das Ideal $J_A = \{g \in \mathbb{Q}[X] \mid g(A) = 0\}$.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 51 12 Punkte

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und $K^{n \times n}$ der K -Vektorraum der $n \times n$ -Matrizen. Ferner sei $\text{GL}_n(K)$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen aus $K^{n \times n}$.

- a** Sei $A \in K^{n \times n}$, und V der von den Matrizen A^0, A^1, A^2, \dots erzeugte Unterraum von $K^{n \times n}$. Man zeige, dass $\dim V \leq n$.

Hinweis Satz von Cayley-Hamilton.

- b** Sei K ein endlicher Körper. Man zeige, dass jedes Element aus $\text{GL}_n(K)$ höchstens die Ordnung $|K|^n - 1$ hat.

Hinweis Für $A \in \text{GL}_n(K)$ vergleiche man die von A erzeugte Untergruppe von $\text{GL}_n(K)$ mit V .

Aufgabe 2 → S. 52 12 Punkte

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen ≥ 1 . Man zeige:

- a** $X^m - 1$ ist ein Teiler von $X^n - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ genau dann, wenn m ein Teiler von n ist.
- b** $X^m + 1$ ist ein Teiler von $X^n + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ genau dann, wenn m ein Teiler von n und n/m ungerade ist.
- c** Genau dann ist $X^n + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, wenn n eine Potenz von 2 ist.

Hinweis Für eine Zweierpotenz n ist $(X + 1)^n + 1$ ein Eisenstein-Polynom.

Aufgabe 3 → S. 53 10 Punkte

Sei p eine Primzahl, die die Ordnung der endlichen Gruppen G teilt. Weiter sei P eine zyklische p -Sylowgruppe von G . Man zeige:

- a** P enthält genau eine Untergruppe der Ordnung p .
- b** Es gelte $|P \cap x^{-1}Px| > 1$ für alle $x \in G$. Man zeige, dass G einen Normalteiler N hat mit $|N| = p^e$ mit $e \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 → S. 54

11 Punkte

Sei R ein Integritätsbereich und $I \subseteq R$ ein Primideal, so dass der Index $[R : I]$ der additiven Gruppen endlich ist. Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal von R ist.

Aufgabe 5 → S. 54

15 Punkte

Sei $f(X) = X^4 - 2X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

a Zeigen Sie, dass

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1 - \sqrt{3}}, \quad \alpha_3 = -\alpha_1, \quad \alpha_4 = -\alpha_2$$

die Nullstellen von f in \mathbb{C} sind.

b Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha_1) \neq \mathbb{Q}(\alpha_2)$ (als Teilkörper von \mathbb{C}).

c Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha_1) \cap \mathbb{Q}(\alpha_2)$.

d Zeigen Sie, dass die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha_1)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha_2)$ galoissch sind.

e Sei K der Zerfällungskörper von f über \mathbb{Q} . Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset K$ galoissch ist und bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galois-Gruppe.

Lösungen zu Thema Nr. 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T1A1)

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem euklidischen Vektorraum V . Eine **Orthogonalprojektion** auf einen Untervektorraum $U \subseteq V$ ist eine lineare Abbildung $\pi_U: V \rightarrow U$, sodass

$$\langle \pi_U(v) - v, u \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } u \in U$$

erfüllt ist.

„ \Rightarrow “: Wir zeigen zunächst, dass $f^2 = f$, das zeigt dann gerade $M^2 = M$. Sei dazu U der Unterraum der Dimension k mit $f = \pi_U$ und sei $v \in V$ beliebig vorgegeben. Nach Definition gilt dann $f(v) \in U$, insbesondere also $f^2(v) - f(v) \in U$. Da sich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu einem Skalarprodukt auf U beschränkt, dort also auch eine nicht-ausgeartete Bilinearform definiert, folgt aus

$$\langle f^2(v) - f(v), u \rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in U,$$

dass bereits $f^2(v) - f(v) = 0$ gelten muss. Weil $v \in V$ ebenfalls beliebig war, zeigt dies $f^2 = f$.

Wir zeigen als nächstes, dass M symmetrisch ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\langle Mv, w \rangle = \langle v, Mw \rangle$ für alle $v, w \in V$ erfüllt ist. Dazu bemerke zunächst, dass $f(v)$ und $f(w)$ in U liegen, sodass

$$\langle f(v) - v, f(w) \rangle = 0 = \langle f(w) - w, f(v) \rangle$$

gilt. Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als Skalarprodukt eine symmetrische Bilinearform ist, haben wir nun die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle &\Leftrightarrow \langle w, f(v) \rangle = \langle v, f(w) \rangle \\ \Leftrightarrow \langle f(w), f(v) \rangle - \langle f(w) - w, f(v) \rangle &= \langle f(v), f(w) \rangle - \langle f(v) - v, f(w) \rangle \\ \Leftrightarrow \langle f(v), f(w) \rangle &= \langle f(v), f(w) \rangle \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f selbst-adjungiert ist, die Darstellungsmatrix M von f also symmetrisch ist. Es fehlt noch nachzuweisen, dass $\text{Tr } M = k$ ist. Sei $v \in U$, dann gilt für alle $u \in U$, dass

$$\langle f(v) - v, u \rangle = 0.$$

Weil $f(v) - v$ selbst in U liegt, folgt $f(v) - v = 0$ wie oben. Dies zeigt $f|_U = \text{id}_U$, d. h. $U \subseteq \text{Eig}_1(f)$. Nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen gilt weiter

$$V \cong \text{im } f \oplus \ker f = U \oplus \ker f.$$

Wählt man eine Basis von U und einer von $\ker M$, so bilden diese demnach zusammen eine Basis von V und f hat in dieser Basis die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit genau k Einträgen 1 für die k Basisvektoren von U . Da sich die Spur bei einem Basiswechsel nicht ändert, folgt $\text{Tr } M = k$.

„ \Leftarrow “: Sei nun umgekehrt f eine lineare Abbildung mit idempotenter und symmetrischer Darstellungsmatrix M . Sei $U = \text{im } f$ und $u = f(v) \in \text{im } f$, dann gilt

$$f(u) = f^2(v) = f(v) = u, \quad (\star)$$

da M idempotent ist. Weil M symmetrisch ist, ist außerdem f selbst-adjungiert. Daraus folgt, dass für alle $v \in V$ und $u \in U$ die Gleichung

$$\langle f(v), u \rangle = \langle v, f(u) \rangle \stackrel{(\star)}{=} \langle v, u \rangle \Leftrightarrow \langle f(v) - v, u \rangle = 0$$

gilt. Nach Definition ist daher f eine Orthogonalprojektion auf U und es bleibt zu zeigen, dass $\dim U = \text{Tr } M$. Wir haben

$$V \cong \text{im } f \oplus \ker f = U \oplus \ker f.$$

Oben haben wir außerdem bereits $f|_U = \text{id}_U$ gezeigt. Zusammen ergibt das wieder, dass M eine Diagonalgestalt wie oben besitzt, wobei die Anzahl der Einträge 1 der Dimension von U entspricht. Diese Anzahl ist gerade $\text{Tr } M$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T1A2)

„ \Leftarrow “: Wir nehmen zunächst an, dass n ungerade und nicht durch 3 teilbar ist. Es dann auf jeden Fall $n + 1$ gerade, also durch 2 teilbar. Falls $n \equiv 1 \pmod{3}$, so ist $2n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ und falls $n \equiv 2 \pmod{3}$, so ist $n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Das Produkt $(n + 1)(2n + 1)$ ist daher auf jeden Fall durch 2 und 3 teilbar, also durch 6 teilbar. Es folgt, dass $m = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ eine ganze Zahl ist, und laut dem Hinweis ist

$$\sum_{k=1}^n k^2 = n \cdot m.$$

Dies zeigt, dass $\sum_{k=1}^n k^2$ durch n teilbar ist.

„ \Rightarrow “: Sei umgekehrt $\sum_{k=1}^n k^2$ durch n teilbar, dann gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $\sum_{k=1}^n k^2 = n \cdot m$. Laut dem Hinweis folgt

$$\frac{1}{6}n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) = nm \quad \Leftrightarrow \quad (n + 1)(2n + 1) = 6m.$$

Betrachtet man diese Gleichung modulo 2, steht da $(n + 1) \cdot 1 \equiv 0 \pmod{2}$, also $n \equiv 1 \pmod{2}$, und betrachtet man die Gleichung modulo 3, wird daraus $(n + 1) \cdot (-n + 1) \equiv 0 \pmod{3}$. Da $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ein Integritätsbereich ist, ist Letzteres genau dann der Fall, wenn $n \equiv -1 \pmod{3}$ oder $n \equiv 1 \pmod{3}$. Insbesondere ist n weder durch 2 noch durch 3 teilbar.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T1A3)

- a** Wegen $(H : N) = 2$ gibt es neben N nur eine weitere Nebenklasse in H/N . Da $x, y \notin N$, müssen x und y beide in dieser Nebenklasse liegen, d. h. $yN = xN$. Daraus erhält man schon mal $x^{-1}y \in N$. Nun ist auch $x^{-1} \notin N$, denn andernfalls würde $x \in N$ aufgrund der Untergruppeneigenschaft von N folgen. Wenden wir also das gleiche Argument auf y und $x' = x^{-1}$ an, so erhalten wir $xy \in N$.
- b** Man kann hier natürlich alle vier auftretenden Fälle zu Fuß abklappern. Oder man macht Folgendes: Als Gruppe der Ordnung 2 ist H/N isomorph zu $(\{\pm 1\}, \cdot)$, Komposition mit der Projektion $H \rightarrow H/N$ liefert einen Homomorphismus

$$\sigma: H \rightarrow \{\pm 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in N, \\ -1 & \text{falls } x \notin N. \end{cases}$$

Die Verknüpfungsvorschrift wird damit zu $(a, x) \circledast (b, y) = (a + \sigma(x)b, xy)$. Seien nun also $(a, x), (b, y), (c, z) \in A \times H$ vorgegeben. Dann berechnet man

$$\begin{aligned} & (a, x) \circledast ((b, y) \circledast (c, z)) = \\ &= (a, x) \circledast (b + \sigma(y)c, yz) = (a + \sigma(x)(b + \sigma(y)c), xyz) = \\ &= (a + \sigma(x)b + \sigma(xy)c, xyz) = (a + \sigma(x)b, xy) \circledast (c, z) = \\ &= ((a, x) \circledast (b, y)) \circledast (c, z). \end{aligned}$$

c Da x Ordnung 2 hat, ist $x \neq 1$ und somit $(a, x) \neq (0, 1)$. Wegen

$$(a, x)^2 = (a - a, x^2) = (0, 1)$$

folgt daraus, dass (a, x) Ordnung 2 in $A \times H$ hat.

d Sei $A = \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ und $H = \{\pm 1\}$ mit dem Normalteiler $N = \{1\}$, dann ist $A \times H$ mit der Verknüpfung \circledast eine Gruppe der Ordnung 42. Angenommen, es gibt ein Element $(a, x) \in A \times H$ der Ordnung 14. Wegen $|H| = 2$ kann x nur Ordnung 1 oder 2 haben. Da (a, x) Ordnung 14 haben soll, folgt aus Teil **c**, dass x Ordnung 1 hat, d. h. $x = 1$. Somit gilt

$$(a, x)^n = (a, 1)^n = (na, 1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

sodass $\text{ord}(a, 1) = \text{ord } a$. Wegen $14 \nmid 21$ gibt es jedoch kein Element der Ordnung 14 in A . Der Fall eines Elementes der Ordnung 6 lässt sich vollkommen analog behandeln.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T1A4)

a Ein Element $x = a + b\sqrt{-D}$ ist genau dann eine Einheit, falls $N(x) = a^2 + Db^2 = 1$ gilt. Nehmen wir an, dass $b \neq 0$, dann ist $b^2 \geq 1$, d. h.

$$1 = N(x) = a^2 + Db^2 \geq D > 1,$$

was unmöglich sein kann. Also ist $b = 0$ und $a^2 = 1$. Es folgt $x = 1$ oder $x = -1$.

b Nehmen wir an, es gibt $x, y \in R$ mit $2 = xy$ und $x, y \notin R^*$. Insbesondere ist dann $N(x) \neq 1 \neq N(y)$ und aus der Gleichung

$$4 = N(2) = N(xy) = N(x) \cdot N(y)$$

erhält man als einzig mögliche Lösung $N(x) = 2 = N(y)$. Schreibe $x = a + b\sqrt{-13}$, dann führt die Annahme $b \neq 0$ auf die Ungleichung

$$2 = a^2 + 13b^2 \geq 13.$$

Da dies ein Widerspruch ist, muss $b = 0$ sein. Allerdings hat die resultierende Gleichung $a^2 = 2$ keine Lösung in \mathbb{Z} , sodass die ursprüngliche Annahme falsch gewesen sein muss. Folglich ist 2 irreduzibel in R . Genau so verfährt man im zweiten Fall: Angenommen, es gibt Nicht-Einheiten $x, y \in R$ mit $1 + \sqrt{-13} = xy$, so hätten wir

$$14 = N(1 + \sqrt{-13}) = N(xy) = N(x)N(y),$$

woraus wir o. B. d. A. $N(x) = 7$ und $N(y) = 2$ schließen können. Allerdings haben wir oben bereits gesehen, dass $N(y) = 2$ zu einem Widerspruch führt.

- c** Wäre 2 ein Primelement, so würde aus $14 = (1 + \sqrt{-13})(1 - \sqrt{-13})$ folgen, dass 2 ein Teiler von $1 + \sqrt{-13}$ oder $1 - \sqrt{-13}$ sein müsste. Es gäbe also ein $x \in R$ mit $2x = (1 + \sqrt{-13})$ oder $2x = (1 - \sqrt{-13})$. In beiden Fällen folgt durch Anwenden der Norm jedoch

$$4 \cdot N(x) = N(2x) = N(1 \pm \sqrt{-13}) = 14.$$

Bekanntlich ist aber 4 kein Teiler von 14.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T1A5)

- a** Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \alpha^2 = \frac{\sqrt{5} + 5}{8} &\Rightarrow 8\alpha^2 - 5 = \sqrt{5} \Rightarrow (8\alpha^2 - 5)^2 = 5 \\ &\Rightarrow 64\alpha^4 - 80\alpha^2 + 20 = 0. \end{aligned}$$

Somit ist $16X^4 - 20X^2 + 5$ schon mal ein Polynom, das α als Nullstelle hat. Glücklicherweise ist dieses Polynom nach dem Eisensteinkriterium mit $p = 5$ auch irreduzibel. Da die Irreduzibilität durch Normierung nicht verloren geht, ist $X^4 - \frac{5}{4}X^2 + \frac{5}{16}$ das gesuchte Minimalpolynom.

- b** Angenommen, es ist $i \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$. Dann wäre wegen $\operatorname{Im} \zeta_5^{-1} = -\operatorname{Im} \zeta_5$ auch

$$\alpha = \frac{-i}{2}(e^{2\pi i/5} - e^{-2\pi i/5}) = \frac{-i}{2}(\zeta_5 - \zeta_5^{-1}) \in \mathbb{Q}(\zeta_5).$$

Es folgt $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_5)$. Nach Teil **a** gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$, für den Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ gilt ebenfalls $[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = \varphi(5) = 4$. Deshalb haben wir unter Verwendung der Gradformel:

$$[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}(\alpha)] = \frac{[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]} = \frac{4}{4} = 1,$$

was $\mathbb{Q}(\zeta_5) = \mathbb{Q}(\alpha)$ bedeutet. Allerdings ist wegen $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$, während $\zeta_5 \notin \mathbb{R}$ ist. Die Annahme $i \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$ muss daher falsch gewesen sein.

Lösungen zu Thema Nr. 2

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T2A1)

a Betrachte die Determinantenabbildung $\det: G \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$, welche einen Gruppenhomomorphismus definiert. Sei $A \in G$ und seien $a, b \in \mathbb{F}_p$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dann ist $\det(A) = a$. Folglich ist die Determinantenabbildung surjektiv. Sei $N = \ker \det$, dann liefert der Homomorphiesatz einen Isomorphismus $G/N \cong \mathbb{F}_p^\times$. Da \mathbb{F}_p^\times abelsch ist, ist der Quotient G/N auflösbar. Um Satz 1.30 anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, dass N ebenfalls auflösbar ist. Dazu bestimmen wir zunächst N : Sei $A \in N$ mit $a, b \in \mathbb{F}_p$ wie oben, dann gilt

$$A \in N \iff \det A = 1 \iff a = 1,$$

also ist

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

Man kann nun direkt überprüfen, dass N abelsch ist oder zeigt, dass

$$N \rightarrow \mathbb{F}_p, \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto b$$

ein Isomorphismus ist. Auf jeden Fall ist N auflösbar.

b Laut dem Dritten Sylowsatzes gilt für die Anzahl ν_p der p -Sylowgruppen von G , dass $\nu_p \equiv 1 \pmod{p}$ und $\nu_p \mid p-1$. Die zweite Bedingung liefert insbesondere $\nu_p \leq p-1$, weswegen nur $\nu_p = 1$ beide Bedingungen erfüllt. Sei H die einzige p -Sylowgruppe, dann ist diese ein Normalteiler von G .

Außerdem ist H als Gruppe von Primzahlordnung zyklisch und somit auflösbar. Aus Satz 1.30 folgt daher, dass G genau dann auflösbar ist, wenn G/H auflösbar ist.

- c** Zufälligerweise ist $|C| = 61 \cdot 60$ und 61 ist eine Primzahl. Dabei ist $H = \mathbb{Z}/61\mathbb{Z} \times \{\text{id}\}$ die eindeutige Untergruppe der Ordnung 61 von G . Nach Teil **b** ist daher C genau dann auflösbar, wenn $C/H \cong A_5$ auflösbar ist. Da die alternierende Gruppe A_5 nicht auflösbar ist, kann also auch C nicht auflösbar sein.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T2A2)

- a** Sei $x + I \in R/I$ beliebig vorgegeben mit $x = a + bi$. Es ist dann

$$x + I = a + bi + I = (a - 7b) + b(7 + i) + I = a - 7b + I,$$

d. h. $\varphi(a - 7b) = x + I$, sodass φ surjektiv ist. Sei nun $a \in \ker \varphi \subseteq \mathbb{Z}$, dann gilt $\varphi(a) = \bar{0}$, d. h. $a \in I$. Es gibt also $x, y \in \mathbb{Z}$, sodass

$$a = 25x + y(7 + i) = (25x + 7y) + yi.$$

Da a eine ganze Zahl ist, muss der Imaginärteil auf der rechten Seite verschwinden, was gerade $y = 0$ bedeutet. Also ist $a = 25x$ und liegt in $25\mathbb{Z}$. Umgekehrt liegt $25\mathbb{Z}$ natürlich im Kern von φ , sodass $\ker \varphi = 25\mathbb{Z}$.

- b** Nach Teil **a** und dem Homomorphiesatz gilt $R/I \cong \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$. Unter Verwendung von Satz 2.8 (2) gilt daher

$$(R/I)^\times \cong (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}.$$

- c** Die Anzahl der verschiedenen Erzeuger einer Gruppe der Ordnung n ist die Anzahl der Elemente der Ordnung n dieser Gruppe und damit $\varphi(n)$. In unserem Fall sind das also

$$\varphi(20) = \varphi(4 \cdot 5) = \varphi(4) \cdot \varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T2A3)

- a** Wir berechnen die Nullstellen von f mit der Substitution $u = x^2$

$$x^4 - 6x^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 6u - 14 = 0 \Leftrightarrow u = 3 \pm \sqrt{23}.$$

Somit sind die vier Nullstellen gegeben durch

$$\pm\sqrt{3 + \sqrt{23}}, \pm\sqrt{3 - \sqrt{23}}.$$

Damit ist $Z = \mathbb{Q}(\sqrt{3 + \sqrt{23}}, \sqrt{3 - \sqrt{23}})$ ein Zerfällungskörper von f . Wir zeigen $Z = K$. Betrachte dazu

$$\sqrt{3 + \sqrt{23}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{23}} = \sqrt{9 - 23} = \sqrt{-14}.$$

Damit liegt einerseits $\sqrt{3 - \sqrt{23}} = \frac{\sqrt{-14}}{\sqrt{3 + \sqrt{23}}}$ in K , andererseits liegt $\sqrt{-14}$ in Z . Insgesamt haben wir damit $Z = K$ und K ist Zerfällungskörper von f .

- b** Sei nun $\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{23}}$. Das Polynom f ist normiert, irreduzibel über \mathbb{Q} laut dem Eisensteinkriterium mit $p = 2$ und hat α als Nullstelle. Damit ist

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \text{grad } f = 4.$$

Das Polynom $g = X^2 + 14 \in \mathbb{Q}(\alpha)[X]$ hat die Nullstelle $\sqrt{-14}$. Das Minimalpolynom von $\sqrt{-14}$ über $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist damit ein Teiler von g und wir erhalten $[\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-14}) : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq 2$. Wäre der Grad 1, so wäre $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-14}) = \mathbb{Q}(\alpha)$. Nun ist der Körper auf der rechten Seite wegen $\alpha \in \mathbb{R}$ aber ein Teilkörper der reellen Zahlen, während der Körper auf der linken Seite mit $\sqrt{-14}$ ein Element von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ enthält – Widerspruch. Der Erweiterungsgrad beträgt deswegen 2 und die Gradformel liefert uns

$$[K : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-14}) : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4 \cdot 2 = 8.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T2A4)

- a** Wir verwenden das Reduktionskriterium und zeigen, dass das Bild $\bar{f} = x^3 + x + \bar{1}$ irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$ ist. Dazu genügt es zu überprüfen, dass \bar{f} keine Nullstellen in \mathbb{F}_2 besitzt. Wegen $f(\bar{0}) = \bar{1}$ und $f(\bar{1}) = \bar{1}$ ist das der Fall.

b Als irreduzibles und normiertes Polynom mit Nullstelle a ist f das Minimalpolynom von a über \mathbb{Q} . Wäre $b = 0$, so wäre $x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ ein Polynom von kleinerem Grad als f , das a als Nullstelle hat, im Widerspruch dazu, dass f das Minimalpolynom von a ist. Also muss $b \neq 0$ sein.

c Sei g das Minimalpolynom von a^2 über \mathbb{Q} , dann ist $\text{grad } g = [\mathbb{Q}(a^2) : \mathbb{Q}]$. Wegen $a^2 \in \mathbb{Q}(a)$ und $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = \text{grad } f = 3$ ist nach 3.2 dann $\text{grad } g$ ein Teiler von 3. Wäre $\text{grad } g = 1$, so wäre $a^2 \in \mathbb{Q}$. Dies kann jedoch nicht sein, da sonst $X^2 - a^2$ ein Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ mit Nullstelle a wäre, das kleineren Grad als f hat. Also wissen wir schon mal, dass wir nach einem Polynom von Grad 3 suchen müssen, wenn wir g finden wollen.

Wir berechnen unter Verwendung von $f(a) = 0$, also $a^3 = a + 1$:

$$\begin{aligned}(a^2)^3 &= (a^3)^2 = (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a(a^3 - 1) + 2a + 1 = a^4 + a + 1 \\ &= a^4 + a^2 - a^2 + a + 1 = a^4 + a(a + 1) - a^2 + 1 = 2a^4 - a^2 + 1\end{aligned}$$

Also ist das Polynom $x^3 - 2x^2 + x - 1$ ein Kandidat für g . Da dieses Polynom normiert ist und den richtigen Grad, nämlich 3, hat, handelt sich dabei tatsächlich um g .

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T2A5)

a Wir erhalten mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz, angewendet auf die 3. Zeile

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-X & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1-X \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1-X) \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -2-X & 0 \\ 2 & 2 & -1-X \end{pmatrix} = (X+1)^4.\end{aligned}$$

A hat damit den vierfachen Eigenwert -1 . Damit A diagonalisierbar ist, müsste $\text{Eig}(A, -1) = \ker(A + \mathbb{E}_4)$ vierdimensional sein, also ganz \mathbb{Q}^4 sein. Dies ist nur möglich, wenn $A + \mathbb{E}_4$ die Nullmatrix ist. Wegen

$$A + \mathbb{E}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ist A also nicht diagonalisierbar (alternativ berechne $\text{Eig}(A, -1)$ wie ge-

wohnt).

- b** Das gesuchte Ideal wird vom Minimalpolynom von A erzeugt (vgl. Seite 232). Dieses ist laut dem Satz von Cayley-Hamilton ein Teiler des charakteristischen Polynoms. Es kommen daher nur Potenzen von $X + 1$ infrage. Wir haben oben bereits gesehen, dass $A + \mathbb{E}_4$ nicht die Nullmatrix ergibt. Weiter gilt

$$(A + \mathbb{E}_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $(X + 1)^2$ das Minimalpolynom von A und wir haben

$$J_A = ((X + 1)^2).$$

Lösungen zu Thema Nr. 3

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T3A1)

- a** Sei χ_A das charakteristische Polynom von A . Der Grad von χ_A ist n . Nach dem Satz von Cayley-Hamilton 4.6 ist $\chi_A(A) = 0$, somit erhalten wir eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 \mathbb{E}_n &= 0 \\ \Leftrightarrow A^n &= \frac{-1}{a_n} (a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 \mathbb{E}_n). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun per vollständiger Induktion, dass jede Potenz der Form A^m für $m \geq n$ als Linearkombination von $\{\mathbb{E}_n, \dots, A^{n-1}\}$ darstellen lässt: Für $m = n$ haben wir dies bereits begründet. Für den Induktionsschritt betrachte

$$\begin{aligned} A^{m+1} &= A A^m \stackrel{(I.V.)}{=} A (b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_0 \mathbb{E}_n) = b_{n-1} A^n + \dots + b_0 A = \\ &= b_{n-1} \left(\frac{-1}{a_n} (a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 \mathbb{E}_n) \right) + b_{n-2} A^{n-2} + \dots + b_0 A. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit

$$V = \langle A^0, A^1, A^2, \dots \rangle \subseteq \langle A^0, A^1, \dots, A^{n-1} \rangle$$

und deshalb $\dim V \leq n$.

b Sei $A \in \text{GL}_n(K)$. Die von A erzeugte Untergruppe ist gegeben durch

$$\langle A \rangle = \{A^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Sei $k \geq 0$, so gilt $A^k \in V$ laut der Definition von V . Um zu zeigen, dass auch die Matrix A^{-k} in V liegt, bemerke, dass mit K auch $\text{GL}_n(K)$ endlich ist. Damit ist $A^m = AA^{m-1} = \mathbb{E}_n$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und damit $A^{-1} = A^{m-1}$, also auch $A^{-k} = (A^{-1})^k = (A^{m-1})^k \in V$. Damit haben wir $\langle A \rangle \subseteq V \setminus \{0\}$. Der Untervektorraum V hat wegen $\dim V \leq n$ höchstens $|K|^n$ Elemente, also ist

$$\text{ord } A = |\langle A \rangle| \leq |V \setminus \{0\}| = |K|^n - 1.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T3A2)

a Division mit Rest ergibt Zahlen $q, r \in \mathbb{N}$ mit $n = qm + r$. Wir zeigen, dass $X^n - 1 \equiv 0 \pmod{(X^m - 1)}$ genau dann gilt, wenn $r = 0$ ist. Betrachte hierzu zunächst

$$X^n - 1 \equiv X^{qm+r} - 1 \equiv 1^q \cdot X^r - 1 \equiv X^r - 1 \pmod{(X^m - 1)}.$$

Wegen $\text{grad } X^r - 1 < \text{grad } X^m - 1$ ist $X^r - 1$ der eindeutige Rest der Division von $X^n - 1$ durch $X^m - 1$ und es ist $X^m - 1$ genau dann ein Teiler von $X^n - 1$, wenn $X^r - 1 = 0$, also $r = 0$ gilt.

b Hier haben wir, wiederum für $n = qm + r$,

$$X^n + 1 \equiv X^{qm+r} + 1 \equiv (-1)^q X^r + 1 \pmod{(X^m + 1)}.$$

Nach gleicher Begründung ist $X^m + 1$ genau dann ein Teiler von $X^n + 1$, wenn $(-1)^q X^r + 1 = 0$ ist. Aus Gradgründen ist dies genau dann der Fall, wenn $r = 0$ und $(-1)^q = -1$, also q ungerade ist.

c Ist n keine Potenz von zwei, so hat n einen ungeraden Teiler d und somit eine Darstellung der Form $n = dm$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Da somit aber m ein Teiler von n und $n/m = d$ ungerade ist, hat $X^n + 1$ laut Teil **b** den Teiler $X^m + 1$ und ist somit nicht irreduzibel.

Nehmen wir an, n ist eine Zweierpotenz. Wir zeigen, dem Hinweis entsprechend, zunächst, dass dann $(X + 1)^n + 1$ irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium ist. Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$(X + 1)^n + 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k + 1 = X^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} X^k + 2.$$

Also ist der letzte Koeffizient durch zwei, nicht aber durch 2^2 teilbar. Mit dem *freshman's dream* angewendet auf die Zweierpotenz n erhalten wir

$$(X + 1)^n + 1 \equiv X^n + 2 \equiv X^n \pmod{2},$$

sodass außer dem Leitkoeffizienten alle Koeffizienten durch 2 teilbar sind. Also handelt es sich bei $(X + 1)^n + 1$ tatsächlich um ein Eisenstein-Polynom mit $p = 2$. Nehmen wir nun an, dass $X^n + 1 = fg$ eine Zerlegung in Nicht-Einheiten $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ wäre, dann ist

$$(X + 1)^n + 1 = f(X + 1)g(X + 1)$$

eine Zerlegung von $(X + 1)^n + 1$ in Nicht-Einheiten, im Widerspruch dazu, dass dieses Polynom wie eben gezeigt irreduzibel ist. Also kann es eine solche Zerlegung von $X^n + 1$ nicht geben.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T3A3)

a Da P eine p -Sylowgruppe ist, ist p ein Teiler ihrer Ordnung. Damit folgt die Aussage daraus, dass in zyklischen Gruppen für jeden Teiler der Gruppenordnung genau eine Untergruppe entsprechender Ordnung existiert.

b Betrachte die Menge

$$N = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Px.$$

Für beliebiges $x \in G$ sind die Konjugierten $x^{-1}Px$ wiederum p -Sylowgruppen von G , also handelt es sich dabei insbesondere um Untergruppen von G , sodass auch N eine Untergruppe von G ist. Zudem ist laut Voraussetzung $|N| > 1$ und da N auch eine Untergruppe von P ist, muss laut dem Satz von Lagrange $|N| = p^e$ für ein $e \in \mathbb{N}$ gelten. Wir zeigen noch, dass es sich bei N um einen Normalteiler handelt. Sei dazu $x^{-1}px \in N$ und $g \in G$, dann gilt

$$g(x^{-1}px)g^{-1} = gx^{-1}pxg^{-1} = (gx^{-1})p(gx^{-1})^{-1} \in N.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T3A4)

Da I ein Primideal ist, ist R/I nach Satz 2.7 (1) ein Integritätsbereich, der wegen $[R : I] < \infty$ endlich ist. Mittels einer der Methoden aus dem Kasten auf Seite 74 zeigt man, dass R/I bereits ein Körper sein muss, sodass I nach Satz 2.7(2) ein maximales Ideal ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T3A5)

a Es gilt

$$(1 \pm \sqrt{3})^2 - 2(1 \pm \sqrt{3}) - 2 = 1 \pm 2\sqrt{3} + 3 - 2 \mp 2\sqrt{3} - 2 = 0,$$

sodass α_1 und α_2 Nullstellen von f sind. Da f ein gerades Polynom ist, folgt daraus auch, dass α_3 und α_4 Nullstellen von f sind.

b Wegen $\sqrt{3} > 1$ ist $\alpha_2 \notin \mathbb{R}$, während $\mathbb{Q}(\alpha_1) \subseteq \mathbb{R}$ gilt. Damit ist $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}(\alpha_1)$.

c Die Inklusion „ \subseteq “ folgt aus

$$\sqrt{3} = \sqrt{1 + \sqrt{3}}^2 - 1 = -\sqrt{1 - \sqrt{3}}^2 + 1 \in \mathbb{Q}(\alpha_1) \cap \mathbb{Q}(\alpha_2).$$

Für die Inklusion „ \supseteq “ sei $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha_1) \cap \mathbb{Q}(\alpha_2)$. Bemerke zunächst, dass der Körper $\mathbb{Q}(\alpha_1)$ ein Teilkörper der reellen Zahlen ist, also muss auch β reell sein.

Das Polynom f ist normiert, irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium mit $p = 2$ und hat α_1 und α_2 als Nullstelle, ist also das Minimalpolynom von α_1 und α_2 . Damit erhalten wir

$$[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha_2) : \mathbb{Q}] = \text{grad } f = 4.$$

Somit besitzt β als Element von $\mathbb{Q}(\alpha_2)$ eine Darstellung der Form

$$\beta = a + b\alpha_2 + c\alpha_2^2 + d\alpha_2^3 = a + b\sqrt{1 - \sqrt{3}} + c(1 - \sqrt{3}) + d\sqrt{(1 - \sqrt{3})^3}$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. $\beta \in \mathbb{R}$ ist daher nur möglich, falls $b = d = 0$ gilt. Daraus folgt sogleich $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

d Der Grad der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3})|\mathbb{Q}$ ist 2, wie man routiniert zeigt. Somit liefert die Gradformel

$$[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = [\mathbb{Q}(\alpha_2) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = \frac{4}{2} = 2.$$

Als Erweiterungen von Grad zwei sind die beiden Erweiterungen damit normal. Ferner handelt es sich bei $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ um einen Körper der Charakteristik 0, sodass die Erweiterungen auch separabel, insgesamt also galoissch sind.

- e** Wiederum ist die Erweiterung natürlich separabel, ferner ist K laut Definition Zerfällungskörper von f und damit auch normal. Der Zerfällungskörper K enthält $\mathbb{Q}(\alpha_1)$ und $\mathbb{Q}(\alpha_2)$ und ist der kleinste Körper mit dieser Eigenschaft. Somit handelt es sich bei K um das Kompositum $\mathbb{Q}(\alpha_1) \cdot \mathbb{Q}(\alpha_2)$. Mit Proposition 3.23 (2) erhalten wir, da $\mathbb{Q}(\alpha_1) \cap \mathbb{Q}(\alpha_2) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ laut Teil **c** gilt,

$$G_{K|\mathbb{Q}(\sqrt{3})} \cong G_{\mathbb{Q}(\alpha_1)|\mathbb{Q}(\sqrt{3})} \times G_{\mathbb{Q}(\alpha_2)|\mathbb{Q}(\sqrt{3})} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Prüfungstermin: Herbst 2016

Thema Nr. 1 (Aufabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 61 12 Punkte

Seien N ein auflösbarer Normalteiler einer endlichen Gruppe G und H eine weitere auflösbare Untergruppe von G . Zeigen Sie, dass

$$\{nh \mid n \in N, h \in H\}$$

wieder eine auflösbare Untergruppe von G ist.

Aufgabe 2 → S. 61 12 Punkte

Seien p eine Primzahl und $k \leq p - 2$. Zeigen Sie, dass die Einheitsmatrix I_k die einzige Matrix $A \in \text{GL}_k(\mathbb{Q})$ mit der Eigenschaft $A^p = I_k$.

Aufgabe 3 → S. 61 12 Punkte

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Zu jedem $a \in R$ existiere ein $b \in R$ mit $a^2 \cdot b = a$.

- a** Zeigen Sie, dass R reduziert ist, das heißt, 0 das einzige nilpotente Element in R ist.
- b** Zeigen Sie weiter, dass jedes Primideal \mathfrak{p} in R maximal ist.

Aufgabe 4 → S. 62 12 Punkte

Sei $a \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine Folge (x_n) , $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$x_n = a^{2^n} + 1.$$

- a** Sei $n < m$. Zeigen Sie, dass x_n ein Teiler von $x_m - 2$ ist.
- b** Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von x_n und x_m .
- c** Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 5 → S. 62

12 Punkte

Sei $f(X)$ ein separables Polynom über \mathbb{Q} , welches in der Form $f(X) = h(X^2)$ mit $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ und $n = \deg h(X) \geq 2$ geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass die Galoissche Gruppe (eines Zerfällungskörpers) von $f(X)$ nicht die volle symmetrische Gruppe der Nullstellen sein kann.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 63

6 + 2 Punkte

Sei $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen 2×2 -Matrizen mit Determinante 1. Die Abbildung

$$\varrho: \operatorname{SL}_2(\mathbb{R}) \times H \rightarrow H, \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

definiert eine Gruppenoperation von $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ auf H .

- a** Geben Sie die Bahnen von ϱ an.
- b** Geben Sie den Stabilisator von $i \in H$ an.

Aufgabe 2 → S. 64

6 + 10 Punkte

Seien A, B abelsche Gruppen und $\phi: B \rightarrow \operatorname{Aut}(A)$ ein Homomorphismus von B in die Gruppe der Automorphismen von A . Das *semidirekte Produkt* $A \rtimes_{\phi} B$ ist die folgendermaßen definierte Gruppe:

$$\begin{aligned} A \rtimes_{\phi} B &:= \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &:= (a_1 \phi(b_1)(a_2), b_1 b_2) \end{aligned}$$

- a** Zeigen Sie, dass $A \rtimes_{\phi} B$ genau dann abelsch ist, wenn ϕ trivial ist, also $\phi(b) = \operatorname{id}_A$ für alle $b \in B$ gilt.
- b** Konstruieren Sie eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2015.

Aufgabe 3 → S. 65

2 + 2 + 3 + 3 Punkte

Im Folgenden sei K jeweils der angegebene Körper. Entscheiden Sie jeweils, ob die Matrix A über K diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, K = \mathbb{C}$

b $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \mathbb{R}$

c $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \mathbb{F}_5$

d $A = \begin{pmatrix} X+1 & 1 \\ X-1 & 2X-1 \end{pmatrix}, K$ ist der rationale Funktionenkörper $\mathbb{R}(X)$.

Aufgabe 4 → S. 66

2 + 6 + 6 + 2 Punkte

Sei $p > 2$ eine Primzahl. Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \alpha_p) \subset \mathbb{C}$ mit $\alpha_p = \sqrt[p]{p} \in \mathbb{R}$ und $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Zeigen Sie:

a Die Körpererweiterung $K|\mathbb{Q}$ ist galois'sch.

b $[K : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

c Die Teilerweiterung $\mathbb{Q}(\alpha_p)|\mathbb{Q}$ ist nicht normal und daher ist die Galois-Gruppe $\text{Gal}(K|\mathbb{Q})$ nicht abelsch.

d $\text{Gal}(K|\mathbb{Q})$ hat einen Normalteiler der Ordnung p .

Aufgabe 5 → S. 67

10 Punkte

Sei p eine Primzahl. Wir betrachten in $\mathbb{F}_p[X]$ die Polynome $P_1 = X^2 + X + 1$ und $P_2 = X^3 + X^2 + X + 1$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{F}_p[X]$ des Kongruenzsystems

$$F \equiv X - 1 \pmod{P_1} \quad \text{und} \quad F \equiv 1 \pmod{P_2} \quad F \in \mathbb{F}_p[X].$$

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 68

12 Punkte

Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum und $\phi: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus von V , dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a Alle Eigenräume von ϕ sind eindimensional.

b Zu jedem Eigenwert von ϕ existiert in der Jordanschen Normalform genau ein Jordanblock.

c Das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von ϕ sind gleich.

Aufgabe 2 → S. 69

4 + 4 + 4 Punkte

Sei $p \geq 3$ eine ungerade Primzahl und \mathbb{F}_{p^2} der Körper mit p^2 Elementen. Beweisen Sie:

- a** Die Abbildung $f: \mathbb{F}_{p^2} \rightarrow \mathbb{F}_{p^2}$, die durch $f(a) = a^p$ gegeben ist, ist ein Isomorphismus von Ringen.
- b** Durch die Vorschrift $g(a) = a + a^p$ ist eine Abbildung $g: \mathbb{F}_{p^2} \rightarrow \mathbb{F}_p$ gegeben, und diese ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.
- c** Durch die Vorschrift $h(a) = a^{p+1}$ ist eine Abbildung $h: \mathbb{F}_{p^2}^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$ gegeben, und diese ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 3 → S. 70

2 + 2 + 2 + 6 Punkte

Es sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 7^2 \cdot 8$. Mit Syl_7 bezeichnen wir die Menge der 7-Sylowgruppen und mit n_7 die Anzahl der 7-Sylowgruppen von G . Zeigen Sie mithilfe der folgenden Schritte, dass G nicht einfach ist.

- a** Begründen Sie, dass $n_7 \in \{1, 8\}$ gilt.
- b** Begründen Sie, dass G im Fall $n_7 = 1$ nicht einfach ist.
- c** Begründen Sie, dass

$$\cdot: G \times \text{Syl}_7 \rightarrow \text{Syl}_7, \quad (g, P) \mapsto gPg^{-1}$$

eine transitive Operation von G auf Syl_7 ist.

- d** Begründen Sie, dass G auch im Fall $n_7 = 8$ nicht einfach ist.

Aufgabe 4 → S. 71

3 + 3 + 6 Punkte

In einem assoziativen Ring R mit Einselement gelte für jedes Element $x \in R$ entweder $x^2 = 1$ oder $x^n = 0$ für ein $n \geq 1$.

- a** Beweisen Sie, dass die Einheitengruppe von R kommutativ ist.
- b** Beweisen Sie, dass für jedes Element $x \in R$ entweder x oder $1 - x$ eine Einheit ist.
- c** Beweisen Sie, dass R ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 5 → S. 71

12 Punkte

Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ gleichen Grades, sodass $\text{Gal}(f)$ und $\text{Gal}(g)$ gleich viele Elemente haben, aber $\text{Gal}(f)$ abelsch und $\text{Gal}(g)$ nicht abelsch ist.

Lösungen zu Thema Nr. 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T1A1)

Da N ein Normalteiler ist, ist das Komplexprodukt NH eine Untergruppe von G und N ist insbesondere Normalteiler von NH . Nach dem 1. Isomorphiesatz 1.10 (1) ist dann $NH/N \cong H/N \cap H$. Da N laut Angabe auflösbar ist, genügt es nach Satz 1.30 zu zeigen, dass $H/N \cap H$ auflösbar ist. Auch H ist auflösbar, daher können wir Satz 1.30 erneut anwenden (diesmal andersrum) und erhalten, dass der Quotient $H/H \cap N$ auflösbar ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T1A2)

Es ist klar, dass die Einheitsmatrix die geforderte Eigenschaft besitzt. Sei also $A \in \text{GL}_k(\mathbb{Q})$ eine weitere Matrix mit $A^k = I_k$. Dann ist A eine Nullstelle des Polynoms $X^p - 1$ und das Minimalpolynom von A muss ein Teiler dieses Polynoms sein. Sei Φ_n jeweils das n -te Kreisteilungspolynom, dann ist

$$X^p - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_p$$

die eindeutige Zerlegung in irreduzible normierte Faktoren. Das Minimalpolynom von A kann jedoch nicht von Φ_p geteilt werden: Als $k \times k$ -Matrix hat das charakteristische Polynom von A Grad k . Laut dem Satz von Cayley-Hamilton ist das Minimalpolynom von A ein Teiler des charakteristischen Polynoms von A , hat also insbesondere maximal Grad k , während hingegen

$$\text{grad } \Phi_p = \varphi(p) = p - 1 > p - 2 \geq k$$

gilt. Damit muss $\Phi_1 = X - 1$ das Minimalpolynom von A sein und wir erhalten

$$\Phi_1(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A - I_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = I_k.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T1A3)

a Sei $a \in R$. Wir zeigen per Induktion über n , dass für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $a^n = 0$ bereits $a = 0$ folgt. Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich wahr. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $a^{n+1} = 0$ gilt. Es existiert ein $b \in R$, sodass die Gleichung $a^2 b = a$ gilt. Daraus erhält man

$$a^n = a^{n-1} \cdot a = a^{n-1} a^2 b = a^{n+1} b = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt daher $a = 0$.

- b** Wir zeigen, dass R/\mathfrak{p} ein Körper ist. Sei $\bar{a} \in R/\mathfrak{p}$ mit $\bar{a} \neq \bar{0}$. Nach Voraussetzung gibt es $b \in R$, sodass die Gleichung $a^2b = a$ in R erfüllt ist. Man erhält daraus in R/\mathfrak{p} :

$$\bar{a}^2 \cdot \bar{b} = \bar{a} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}(\bar{a}\bar{b} - 1) = \bar{0}$$

Da \mathfrak{p} Primideal ist, ist R/\mathfrak{p} ein Integritätsbereich. Weiter war nach Wahl $\bar{a} \neq \bar{0}$, sodass aus der Gleichung oben $\bar{a}\bar{b} - 1 = \bar{0}$ und damit $\bar{a}\bar{b} = 1$ folgt. Dies bedeutet gerade, dass \bar{a} eine Einheit und somit R/\mathfrak{p} ein Körper ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T1A4)

- a** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen die Aussage per vollständiger Induktion über $m > n$. Den Induktionsanfang müssen wir daher für $m = n + 1$ machen: Es gilt

$$x_{n+1} - 2 = a^{2^{n+1}} - 1 = (a^{2^n} - 1)(a^{2^n} + 1) = (a^{2^n} - 1) \cdot x_n.$$

Dies zeigt, dass $x_{n+1} - 2$ von x_n geteilt wird. Setzen wir die Aussage also für ein m als bereits bewiesen voraus und zeigen die Aussage für $m + 1$: Wir haben

$$x_{m+1} - 2 = a^{2^{m+1}} - 1 = (a^{2^m} - 1)(a^{2^m} + 1) = (x_m - 2) \cdot x_m.$$

Laut Induktionsvoraussetzung ist $x_n \mid (x_m - 2)$ erfüllt, deshalb auch $x_n \mid (x_{m+1} - 2)$.

- b** Sei d ein gemeinsamer Teiler von x_n und x_m . Da laut Teil **a** x_n ein Teiler von $x_m - 2$ ist, muss auch d die Zahl $x_m - 2$ teilen. Insbesondere ist d ein Teiler von

$$2 = x_m - (x_m - 2).$$

Daraus folgt, dass d ein Teiler von 2 sein muss, also $d \in \{1, 2\}$. Ist nun $a \in \mathbb{N}_0$ gerade, so ist x_n ungerade für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also ist der größte gemeinsame Teiler in diesem Fall 1. Ist hingegen a ungerade, so ist x_n gerade für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und der größte gemeinsame Teiler von x_n und x_m ist 2.

- c** Sei a gerade. Wähle jeweils einen Primteiler p_n von x_n , dann hat die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise verschiedene Glieder: Angenommen, es gibt $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $p_n = p_m$, dann ist p_n ein gemeinsamer Primteiler von x_n und x_m . In **b** haben wir jedoch gesehen, dass x_n und x_m teilerfremd sind. Wir haben also mit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unendliche Folge von Primzahlen konstruiert.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T1A5)

Das Polynom f hat $2n$ Nullstellen, diese sind verschieden (da f separabel ist) und wegen $f(-X) = h((-X)^2) = h(X^2) = f(X)$ ist das Negative jeder Nullstelle jeweils wiederum eine Nullstelle. Wir schreiben die Nullstellen als

$$\alpha_1, \alpha_2 = -\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} = -\alpha_{2n-1}.$$

Laut Satz 3.24 existiert ein injektiver Homomorphismus $\phi: \text{Gal}(f) \rightarrow S_{2n}$, wobei $\text{Gal}(f)$ die Galois-Gruppe (eines Zerfällungskörpers) von f bezeichnet. Nehmen wir an, ϕ ist sogar ein Isomorphismus. Wegen $n \geq 2$ ist $(1\ 3) \in S_{2n}$. Das Urbild $\sigma = \phi^{-1}((1\ 3))$ dieser Transposition ist ein \mathbb{Q} -Automorphismus, der nur α_1 und α_3 vertauscht, also

$$\sigma(\alpha_1) = \alpha_3 \text{ und } \sigma(\alpha_i) = \alpha_i \text{ für } i \in \{2, 4, 5, \dots, 2n\}$$

erfüllt. Ein solches Element kann es jedoch nicht geben: Da σ ein \mathbb{Q} -Automorphismus ist, gilt $\sigma(-1) = -1$. Damit erhalten wir aber

$$\sigma(\alpha_2) = \sigma(-\alpha_1) = -\sigma(\alpha_1) = -\alpha_3 = \alpha_4.$$

Wegen $\sigma(\alpha_2) = \alpha_4 \neq \alpha_2$ ist das ein Widerspruch.

Lösungen zu Thema Nr. 2

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T2A1)

a Sei $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$. Wir behaupten, dass es nur eine Bahn gibt, die Operation also transitiv ist. Dazu zeigen wir

$$G(i) = H.$$

Die Inklusion „ \subseteq “ ist klar laut Definition der Gruppenoperation. Sei umgekehrt $x + iy \in H$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^+$. Wir bestimmen eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $\varrho(A, i) = x + iy$. Es gilt unter Verwendung von $ad - bc = \det A = 1$

$$\begin{aligned} \varrho(A, i) &= \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-ci + d)}{(ci + d)(-ci + d)} = \\ &= \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + i}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Da nur die Existenz solcher Zahlen zu zeigen ist, dürfen wir der Einfachheit halber $c = 0$ setzen. Damit $\text{Im } \varrho(A, i) = y$ gilt, muss $\frac{1}{d^2} = y$ sein, wir wählen also weiter $d = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Wegen $\det A = ad = 1$ muss dann $a = \frac{1}{d} = \sqrt{y}$ gelten. Für b erhalten wir zuletzt

$$\frac{ac + bd}{d^2} = x \Leftrightarrow \frac{bd}{d^2} = x \Leftrightarrow b = xd = \frac{x}{\sqrt{y}}.$$

Wir überprüfen dieses Ergebnis. A ist eine Matrix in G , und tatsächlich gilt

$$\varrho\left(\left(\begin{array}{cc} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{array}\right), i\right) = \frac{i\sqrt{y} + \frac{x}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = x + iy.$$

Insgesamt haben wir für beliebiges $x + iy \in H$ gezeigt, dass $x + iy \in G(i)$ und somit haben wir Gleichheit. Es gibt damit nur eine Bahn, nämlich H .

b Wir zeigen

$$\text{Stab}_G(i) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

(vgl. die erste Inklusion dazu, wie man darauf kommt).

„ \subseteq “: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Stab}_G(i)$. Dann gilt $\varrho(A, i) = i$ und somit

$$\frac{ai + b}{ci + d} = i \Leftrightarrow ai + b = di - c \Leftrightarrow a = d \text{ und } b = -c.$$

Wegen $\det A = 1$ muss zudem $a^2 + b^2 = 1$ erfüllt sein. Damit ist A ein Element der Menge auf der rechten Seite der Gleichung.

„ \supseteq “: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$, dann gilt

$$\varrho\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, i\right) = \frac{ai + b}{-bi + a} = \frac{(ai + b)(a + bi)}{(a - bi)(a + bi)} = \frac{-ab + ab + i(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = i.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T2A2)

a „ \Rightarrow “: Nehmen wir an, dass $A \rtimes_{\phi} B$ abelsch ist. Sei $b \in B$ beliebig und e_A das Neutralelement von A , e_B das von B . Dann gilt für alle $a \in A$

$$(e_A, b) \cdot (a, b) = (a, b) \cdot (e_A, b) \Leftrightarrow (e_A \phi(b)(a), b^2) = (a \phi(b)(e_A), b^2).$$

Da $\phi(b)$ ein Automorphismus ist, gilt $\phi(b)(e_A) = e_A$. Damit liefert Vergleich der ersten Komponente

$$\phi(b)(a) = a$$

für alle $a \in A$, also $\phi(b) = \text{id}_A$.

„ \Leftarrow “: Nehmen wir an, es gilt $\phi(b) = \text{id}_A$ für alle $b \in B$. Dann erhalten wir für beliebiges $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \rtimes_{\phi} B$

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 \phi(b_1)(a_2), b_1 b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \stackrel{(*)}{=} \\ &= (a_2 a_1, b_2 b_1) = (a_2 \phi(b_2)(a_1), b_2 b_1) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1). \end{aligned}$$

Dabei wurde an der Stelle $(*)$ verwendet, dass A und B abelsch sind. Insgesamt zeigt die Gleichung, dass $A \rtimes_{\phi} B$ abelsch ist.

- b** Es ist $2015 = 65 \cdot 31$. Wir setzen nun $A = \mathbb{Z}/65\mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$. Das Element $\bar{1} \in A$ hat die Ordnung 65. Ferner gilt

$$\text{Aut}(B) \cong (\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^{\times} \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$$

und da 5 ein Teiler von 30 ist, existiert in $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung 5, und aufgrund der Isomorphien besitzt auch $\text{Aut}(B)$ ein Element der Ordnung 5, das wir mit ψ bezeichnen. Wegen $5 \mid 65$ gibt es einen Homomorphismus $\phi: A \rightarrow \text{Aut}(B)$ mit $\phi(\bar{1}) = \psi$. Dieser Homomorphismus ist wegen $\text{ord } \phi(\bar{1}) = 5 \neq 1$ nicht trivial. Damit ist laut Teil **a** das Produkt $A \rtimes_{\phi} B$ eine nicht-abelsche Gruppe, die die Ordnung $|A \times B| = 65 \cdot 31 = 2015$ hat.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T2A3)

- a** Die Matrix liegt in Jordan-Normalform vor. Wäre A diagonalisierbar, müsste sie daher bereits Diagonalgestalt haben, denn die Jordan-Normalform ist bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig. Aus diesem Grund ist A nicht diagonalisierbar über \mathbb{C} .
- b** Das charakteristische Polynom ist hier $\chi_A = X^2 + 1$ und da dieses über \mathbb{R} nicht in Linearfaktoren zerfällt, ist A nicht diagonalisierbar.
- c** Auch hier ist das charakteristische Polynom natürlich $\chi_A = X^2 + \bar{1}$. Jedoch erhalten wir hier die Zerlegung $\chi_A = (X - \bar{2})(X - \bar{3})$, so dass χ_A in Linearfaktoren zerfällt. Ferner ist die geometrische Vielfachheit kleiner oder gleich der algebraischen und größer gleich 1. Da die algebraische Vielfachheit beider Eigenwerte 1 ist, muss auch die geometrische jeweils 1 betragen. Die Matrix ist somit diagonalisierbar.

d Das charakteristische Polynom (mit der Variable Y) lautet hier

$$\begin{aligned}\chi_A(Y) &= (X+1-Y)(2X-1-Y) - (X-1) = Y^2 - 3XY + 2X^2 = \\ &= (Y-X)(Y-2X).\end{aligned}$$

Damit hat auch hier χ_A zwei verschiedene, einfache Nullstellen und A ist nach dem gleichem Argument wie in Teil **c** diagonalisierbar.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T2A4)

a Da \mathbb{Q} als Körper der Charakteristik 0 perfekt ist, ist die Erweiterung zumindest separabel. Um zu zeigen, dass sie auch normal ist, zeigen wir, dass K der Zerfällungskörper des Polynoms $f = X^p - p \in \mathbb{Q}[X]$ ist. Die p verschiedenen Nullstellen dieses Polynoms sind gegeben durch $\zeta_p^k \alpha_p$ mit $k \in \{1, \dots, p\}$. Alle diese Nullstellen liegen in K , ferner wird K bereits von den Nullstellen α_p und $\zeta_p \alpha_p$ erzeugt. Damit ist K tatsächlich der Zerfällungskörper von f und die Erweiterung ist normal.

b Zunächst ist f irreduzibel aufgrund des Eisensteinkriteriums, hat α_p als Nullstelle und ist normiert, also das Minimalpolynom von α_p . Damit ist $[\mathbb{Q}(\alpha_p) : \mathbb{Q}] = \text{grad } f = p$.

Das Minimalpolynom von ζ_p über \mathbb{Q} ist das p -te Kreisteilungspolynom Φ_p , welches Grad $\varphi(p) = p-1$ hat. ζ_p als Nullstelle. Aus diesem Grund ist $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p-1$.

Aufgrund der Gradformel haben wir

$$[K : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}(\alpha_p)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha_p) : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}(\zeta_p)] \cdot [\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}],$$

also ist $[K : \mathbb{Q}]$ ein Vielfaches von p und $p-1$. Wegen $p > 2$ sind diese beiden Zahlen teilerfremd, sodass wir $[K : \mathbb{Q}] \geq p(p-1)$ erhalten. Andererseits ist Φ_p auch ein Polynom aus $\mathbb{Q}(\alpha_p)[X]$ mit $\Phi_p(\zeta_p) = 0$, also hat das Minimalpolynom von ζ_p über $\mathbb{Q}(\alpha_p)$ maximal den Grad $p-1$. Deshalb gilt

$$[K : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}(\alpha_p)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha_p) : \mathbb{Q}] \leq p(p-1).$$

Insgesamt haben wir $[K : \mathbb{Q}] = p(p-1)$ gezeigt.

c Wir haben bereits gesehen, dass f irreduzibel ist und eine Nullstelle in $\mathbb{Q}(\alpha_p)$ hat. Wäre die Erweiterung normal, so müssen bereits alle Nullstellen in $\mathbb{Q}(\alpha_p)$ liegen. Tatsächlich ist aber beispielsweise die Nullstelle $\zeta_p \alpha_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, während $\mathbb{Q}(\alpha_p) \subseteq \mathbb{R}$ gilt. Damit zerfällt f über $\mathbb{Q}(\alpha_p)$ nicht in Linearfaktoren und die Erweiterung ist nicht normal.

Angenommen, $\text{Gal}(K|\mathbb{Q})$ wäre abelsch. Dann wäre jede Untergruppe ein Normalteiler, insbesondere die Untergruppe $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}(\alpha_p))$. Deren zugehöriger Fixkörper ist $\mathbb{Q}(\alpha_p)$. Laut dem Hauptsatz der Galois-Theorie wäre damit die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha_p)|\mathbb{Q}$ normal – Widerspruch zum ersten Teil der Aufgabe.

d 1. *Möglichkeit:* Die Gruppe $\text{Gal}(K|\mathbb{Q})$ hat Ordnung $p(p-1)$. Eine Untergruppe der Ordnung p ist damit eine p -Sylowgruppe. Sei deren Anzahl ν_p . Wir erhalten mit dem Dritten Sylowsatz $\nu_p \equiv 1 \pmod{p}$, also $\nu_p = 1 + kp$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Zugleich muss aber wegen $\nu_p | p-1$ auch $\nu_p < p$ gelten, weshalb wir $k = 0$ und somit $\nu_p = 1$ folgern können. Da es nur eine einzige p -Sylowgruppe gibt, ist diese ein Normalteiler.

2. *Möglichkeit:* Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p)|\mathbb{Q}$ ist eine Erweiterung vom Grad $p-1$ und ist als zyklotomische Erweiterung normal, sodass die korrespondierende Untergruppe $U = \text{Gal}(K|\mathbb{Q}(\zeta_p))$ ein Normalteiler von $\text{Gal}(K|\mathbb{Q})$ ist. Die Ordnung von U berechnet sich nach dem Zusatz zum Hauptsatz der Galois-Theorie zu

$$|U| = [K : \mathbb{Q}(\zeta_p)] = \frac{[K : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}]} = \frac{p(p-1)}{p-1} = p.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T2A5)

Wegen

$$P_2 - XP_1 = X^3 + X^2 + X + 1 - X^3 - X^2 - X = 1$$

sind die beiden angegebenen Polynome teilerfremd. Nach dem Chinesischen Restsatz haben wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{F}_p[X]/(P_1P_2) &\rightarrow \mathbb{F}_p[X]/(P_1) \times \mathbb{F}_p[X]/(P_2), \\ f + (P_1P_2) &\mapsto (f + (P_1), f + (P_2)). \end{aligned}$$

und die Lösungsmenge der angegebenen Kongruenz ist das Urbild von $(X-1, 1)$ unter ϕ . Mit der Relation von oben erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi(1 + XP_1 + (P_1P_2)) &= (1 + P_1, 0 + P_2) \quad \text{und} \\ \phi(1 - P_2 + (P_1P_2)) &= (0 + P_1, 1 + P_2). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\phi((X-1)(1 + XP_1) + (1 - P_2)) = (X-1, 1).$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 (X-1)(1+XP_1) + (1-P_2) &= \\
 &= (X-1)(X^3+X^2+X+1) + (-X^3-X^2-X) = \\
 &= X^4+X^3+X^2+X-X^3-X^2-X-1-X^3-X^2-X = \\
 &= X^4-X^3-X^2-X-1
 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge des obigen Kongruenzsystems ist somit

$$\mathcal{L} = X^4 - X^3 - X^2 - X - 1 + (P_1P_2).$$

Lösungen zu Thema Nr. 3

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T3A1)

„**a** \Leftrightarrow **b**“: Folgt aus Proposition 4.10 (1).

„**b** \Rightarrow **c**“: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die Eigenwerte von ϕ und schreibe das Minimalpolynom von ϕ als $\mu = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{v_i}$ mit $v_i \in \mathbb{N}$. Laut Proposition 4.10 (2) ist v_i jeweils die Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ_i . Nach (2) gibt es nur jeweils einen Jordanblock, dieser ist dann insbesondere der größte zum jeweiligen Eigenwert, d. h. es gibt genau einen Jordanblock der Größe v_i zum Eigenwert λ_i . Die Jordanblöcke müssen zusammen die Darstellungsmatrix von ϕ ausfüllen, d. h. ihre gesamte Breite muss

$$\sum_{i=1}^m v_i = \dim_K V$$

betragen. Daraus folgt $\text{grad } \mu = \dim_K V$. Da dies genau der Grad des charakteristischen Polynoms χ von ϕ ist, beide normiert sind und laut dem Satz von Cayley-Hamilton 4.6 außerdem $\mu \mid \chi$ gilt, folgt bereits $\mu = \chi$.

„**c** \Rightarrow **b**“: Aus $\mu = \chi$ folgt insbesondere $\text{grad } \mu = \text{grad } \chi$. Wegen $\text{grad } \chi = \dim_K V$ gilt daher $\sum_{i=1}^m v_i = \dim_K V$, wobei $\mu = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{v_i}$ wie zuvor. Das bedeutet: Nimmt man nur die jeweils größten Jordanblöcke zu jedem Eigenwert, so füllen diese bereits die gesamte Breite der Darstellungsmatrix von ϕ . Es kann daher nur zu jedem Eigenwert genau einen Jordanblock geben.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T3A2)

a Es gilt natürlich $f(1) = 1$. Seien nun $a, b \in \mathbb{F}_{p^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(ab) &= (ab)^p = a^p b^p = f(a)f(b), \\ f(a+b) &= (a+b)^p = a^p + b^p = f(a) + f(b). \end{aligned}$$

Dabei folgt die zweite Gleichung durch Anwendung des *freshman's dream*, da \mathbb{F}_{p^2} Charakteristik p hat. Damit ist f ein Körperhomomorphismus und als solcher injektiv. Als injektiver Homomorphismus zwischen endlichen, gleichmächtigen Mengen ist f bijektiv.

b Wir zeigen zunächst, dass g wohldefiniert ist, dass also $g(a) \in \mathbb{F}_p$ für alle $a \in \mathbb{F}_{p^2}$ gilt. Ist $a \in \mathbb{F}_{p^2}$, so gilt $a^{p^2} = a$ und somit

$$g(a)^p = (a + a^p)^p = a^p + a^{p^2} = a^p + a = g(a).$$

Damit ist $g(a)$ eine Nullstelle von $X^p - X$, woraus $g(a) \in \mathbb{F}_p$ folgt. Für $a, b \in \mathbb{F}_{p^2}$ gilt unter Verwendung des *freshman's dream*

$$g(a+b) = (a+b) + (a+b)^p = a + a^p + b + b^p = g(a) + g(b),$$

sodass g ein Gruppenhomomorphismus ist. Zum Nachweis der Surjektivität betrachte, dass für $a \in \mathbb{F}_p$ gilt

$$g(a) = a + a^p = 2a.$$

Wegen $p \geq 3$ ist $2 \neq 0$, also ist 2 invertierbar und wir erhalten für beliebiges $a \in \mathbb{F}_p$

$$a = 2 \cdot 2^{-1}a = g(2^{-1}a).$$

c Für $a \in \mathbb{F}_{p^2}^\times$ gilt

$$h(a)^p = (a^{p+1})^p = a^{p^2+p} = a^{p^2} a^p = a a^p = a^{p+1} = h(a)$$

und somit wie oben $h(a) \in \mathbb{F}_p$. Wäre $h(a) = 0$, so wäre $a = 0$ im Widerspruch zu $a \in \mathbb{F}_{p^2}^\times$. Somit ist $h(a) \in \mathbb{F}_p^\times$. Die Rechnung

$$h(ab) = (ab)^{p+1} = a^{p+1} b^{p+1} = h(a)h(b)$$

für $a, b \in \mathbb{F}_{p^2}^\times$ zeigt, dass h ein Gruppenhomomorphismus ist. Zum Nachweis der Surjektivität sei $a \in \mathbb{F}_p^\times$ vorgegeben. Wir suchen dann ein $b \in \mathbb{F}_{p^2}^\times$

mit $h(b) = a$, d. h. mit $b^{p+1} = a$. Elemente mit dieser Eigenschaft sind genau die Nullstellen des Polynoms $X^{p+1} - a \in \mathbb{F}_p[X]$. Sei daher $c \in \overline{\mathbb{F}}_p$ eine Nullstelle dieses Polynoms in einem algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{F}}_p$ von \mathbb{F}_p . Wegen

$$c^{p^2-1} = (c^{p+1})^{p-1} = a^{p-1} = 1$$

ist c Nullstelle von $X^{p^2-1} - 1$. Die Nullstellen dieses Polynoms sind wiederum genau die Elemente von $\mathbb{F}_{p^2}^\times$. Also liegt c in $\mathbb{F}_{p^2}^\times$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T3A3)

a Der Dritte Sylowsatz liefert sofort

$$n_7 \mid 8 \quad \Rightarrow \quad n_7 \in \{1, 2, 4, 8\}$$

und wegen $2 \not\equiv 1 \pmod{7}$ und $4 \not\equiv 1 \pmod{7}$ folgt $n_7 \in \{1, 8\}$.

b Ist $n_7 = 1$, so existiert nur eine 7-Sylowgruppe. Diese ist dann ein Normalteiler der Ordnung 7^2 und wegen $1 < 7^2 < |G|$ ist diese nicht trivial.

c Da Konjugation mit einem Element einen Automorphismus von G definiert, gilt $|gPg^{-1}| = |P|$ für beliebige $g \in G, P \in \text{Syl}_7$. Damit ist $g \cdot P$ wiederum eine 7-Sylowgruppe, die Abbildung ist also wohldefiniert. Zudem gilt für $P \in \text{Syl}_7, g \in G$, dass

$$\begin{aligned} e \cdot P &= ePe^{-1} = P, \\ (gh) \cdot P &= (gh)P(gh)^{-1} = ghPh^{-1}g^{-1} = g \cdot (hPh^{-1}) = g \cdot h \cdot P. \end{aligned}$$

Laut dem Zweiten Sylowsatz sind zudem je zwei Sylowgruppen zueinander konjugiert. Sind also $P, P' \in \text{Syl}_7$, so gibt es ein $g \in G$ mit $P' = gPg^{-1}$, und damit liegen P' und P in derselben Bahn – die Operation ist also transitiv.

d Nehmen wir $n_7 = |\text{Syl}_7| = 8$ an. Die Operation liefert uns nach Proposition 1.15 einen Homomorphismus

$$\phi: G \rightarrow \text{Per}(\text{Syl}_7) \cong S_8, \quad g \mapsto \tau_g \quad \text{mit} \quad \tau_g(P) = gPg^{-1}.$$

Wir zeigen, dass der Kern dieses Homomorphismus ein nicht-trivialer Normalteiler von G ist. Nehmen wir zunächst widerspruchshalber an, dass $\ker \phi = \{e\}$. Dann wäre ϕ injektiv. Der Homomorphismus $\phi: G \rightarrow \phi(G) \subseteq \text{Per}(\text{Syl}_7)$ wäre damit ein Isomorphismus und G isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Per}(\text{Syl}_7)$. Das ist wegen $7^2 \cdot 8 \nmid 8!$ jedoch ein Widerspruch zum Satz von Lagrange.

Nehmen wir nun an, dass $\ker \phi = G$. Dann wäre $\phi(g) = \text{id}_{\text{Per}(\text{Syl}_7)}$ für alle $g \in G$ und damit $\tau_g(P) = P$, also $gPg^{-1} = P$ für alle $g \in G$ und $P \in \text{Syl}_7$. Damit müsste aber P ein Normalteiler von G sein - was wegen $n_7 \neq 1$ ausgeschlossen ist.

Insgesamt ist $\ker \phi$ ein Normalteiler von G , der nicht-trivial ist, und G ist nicht einfach.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T3A4)

- a** Da der Nullring offensichtlich kommutativ ist, dürfen wir annehmen, dass $R \neq 0$. Sei $r \in R^\times$. Gäbe es $n \in \mathbb{N}$, sodass $r^n = 0$, so wäre $1 = r^{-n} \cdot r^n = 0$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $R \neq 0$. Also gilt $r^2 = 1$ und somit $r^{-1} = r$ für alle $r \in R^\times$.

Seien nun $x, y \in R^\times$. Dann gilt:

$$xy = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1} = yx$$

- b** Nehmen wir an, dass x keine Einheit ist. Dann muss $x^n = 0$ für ein $n \geq 1$ sein, denn im Fall $x^2 = 1$ wäre x eine Einheit. Die geometrische Reihe liefert nun

$$1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Insbesondere ist $1 - x$ eine Einheit.

- c** Seien $x, y \in R$. Sind x und y beides Einheiten, so vertauschen diese nach Teil **a**. Nehmen wir also an, dass o. B. d. A. das Element y keine Einheit ist. Nach Teil **b** ist dann $1 - y$ eine Einheit. Unter Verwendung von Teil **a** gilt also

$$x(1 - y) = (1 - y)x \quad \Leftrightarrow \quad x - xy = x - yx \quad \Leftrightarrow \quad xy = yx.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T3A5)

Vorüberlegung: Erst bei Ordnung 6 finden wir mit S_3 überhaupt eine nicht-abelsche Gruppe. Aus anderen Aufgaben weiß man vielleicht noch, dass ein Polynom dritten Grades, das nur eine reelle Nullstelle hat, diese Galois-Gruppe hat. Ein Polynom, das eine abelsche Galois-Gruppe hat, ist das siebte Kreisteilungspolynom mit Grad 6. Beachte nun noch, dass beide Polynome gleichen Grad haben sollen, aber *nicht* irreduzibel sein müssen.

Definiere zunächst $g = (X^3 + 3X + 3)^2$, dann ist g ein Polynom von Grad 6. Die Nullstellen von g stimmen mit denen von $\bar{g} = X^3 + 3X + 3$ überein,

sodass diese den gleichen Zerfällungskörper und die gleiche Galois-Gruppe besitzen. Nun hat \bar{g} genau eine reelle Nullstelle, denn wegen $\bar{g}(-1) = -1$ und $\bar{g}(0) = 3$ existiert laut dem Zwischenwertsatz ein $\alpha \in]-1, 0[$ mit $\bar{g}(\alpha) = 0$. Hätte \bar{g} eine weitere reelle Nullstelle, so müsste zwischen dieser und α laut dem Satz von Rolle eine Nullstelle der ersten Ableitung \bar{g}' liegen. Dies ist wegen $\bar{g}' = 3X^2 + 3$ unmöglich, da die Ableitung keine reellen Nullstellen besitzt. Damit ist α die einzige reelle Nullstelle, die anderen beiden Nullstellen bilden ein komplex-konjugiertes Paar $\beta, \bar{\beta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Nun wissen wir, dass die Galois-Gruppe von \bar{g} isomorph zu einer Untergruppe von S_3 ist. Ihre Ordnung entspricht dem Erweiterungsgrad des Zerfällungskörpers von g über \mathbb{Q} . Das Polynom \bar{g} ist laut dem Eisensteinkriterium 2.26 mit $p = 3$, irreduzibel und damit wegen $\bar{g}(\alpha) = 0$ das Minimalpolynom von α , sodass die Ordnung von $\text{Gal}(\bar{g})$ Vielfaches von 3, also 3 oder 6 ist. Im Ersteren Fall wäre $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$ bereits der Zerfällungskörper von \bar{g} , was wegen $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nicht möglich ist. Daher haben wir

$$\text{Gal}(g) = \text{Gal}(\bar{f}) \cong S_3.$$

Betrachten wir nun das siebte Kreisteilungspolynom $f = \Phi_7$ mit $\text{grad } f = \varphi(7) = 6$. Die Nullstellen von g sind gegeben durch ζ_7^k für $k \in \{1, \dots, 7\}$ und $\zeta = e^{2\pi i/7}$. Ferner wissen wir $\text{Gal}(f) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ aus Satz 3.18. Damit ist $\text{Gal}(f)$ zyklisch, also insbesondere abelsch.

Prüfungstermin: Frühjahr 2017

Thema Nr. 1 (Aufabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 77

12 Punkte

Sei $L|\mathbb{Q}$ eine endliche Galois'sche Körpererweiterung. Die Norm eines Elements $x \in L$ sei gegeben als

$$N(x) = \prod_{\sigma \in G_{L|\mathbb{Q}}} \sigma(x).$$

- a** Zeigen Sie, dass $N(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x \in L$ und $N(xy) = N(x) \cdot N(y)$ für alle $x, y \in L$.
- b** Sei speziell $L = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. Zeigen Sie, dass $N(r + s\sqrt{5}) = r^2 - 5s^2$ für $r, s \in \mathbb{Q}$.
- c** Betrachten Sie in L den Teilring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{r + s\sqrt{5} \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ gilt, dass x genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist, wenn $N(x) \in \{\pm 1\}$ gilt.
- d** Zeigen Sie, dass 11 kein Primelement in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist.

Aufgabe 2 → S. 78

12 Punkte

Betrachten Sie die Körpererweiterung $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{3}}) \subseteq \mathbb{C}$. Sei $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{3}} \in L$.

- a** Zeigen Sie, dass $\alpha - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ gilt.
- b** Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über \mathbb{Q} .
- c** Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
- d** Bestimmen Sie $G_{L|\mathbb{Q}}$.

Aufgabe 3 → S. 80

12 Punkte

Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 300 gibt.

Hinweis Nehmen Sie an, es gäbe so eine Gruppe und lassen Sie diese auf ihren 5-Sylowgruppen operieren.

Aufgabe 4 → S. 81

12 Punkte

Sei $N \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $N \geq 3$.

- a** Zeigen Sie: Gilt $2^{N-1} \not\equiv 1 \pmod{N}$, ist N keine Primzahl.
- b** Zeigen Sie, dass die Umkehrung der Aussage nicht gilt, indem Sie das Beispiel $N = 341 = 11 \cdot 31$ betrachten.

Aufgabe 5 → S. 81

12 Punkte

Es seien p eine Primzahl, $\overline{\mathbb{F}_p}$ ein algebraischer Abschluss des endlichen Körpers \mathbb{F}_p mit p Elementen. Für $r \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{F}_{p^r} \subseteq \overline{\mathbb{F}_p}$ den Zwischenkörper mit p^r Elementen. Zeigen Sie

- a** Ist $n \in \mathbb{N}$ und A eine $(n \times n)$ -Matrix mit Koeffizienten in \mathbb{F}_p , sodass das charakteristische Polynom χ_A von A irreduzibel über \mathbb{F}_p ist, so ist A über dem Körper \mathbb{F}_{p^n} diagonalisierbar.
- b** Für $p = 5$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht über \mathbb{F}_{125} diagonalisierbar, aber über \mathbb{F}_{25} .

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 82

12 Punkte

Wie viele Elemente der Ordnung 11 gibt es in einer einfachen Gruppe der Ordnung 660?)

Aufgabe 2 → S. 83

12 Punkte

- a** Sei G eine multiplikativ geschriebene Gruppe der Ordnung n und $g \in G$. Weiter gelte $g^{n/p} \neq 1$ für jeden Primteiler p von n gilt. Zeigen Sie: g erzeugt G .
- b** Zeigen Sie: $4^{3^m} \equiv 1 + 3^{m+1} \pmod{3^{m+2}}$ für alle $m \geq 0$.
- c** Zeigen Sie, dass die Restklasse von 2 für jedes $e \geq 1$ die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}/3^e\mathbb{Z}$ erzeugt.

Aufgabe 3 → S. 84

12 Punkte

Sei K ein endlicher Körper mit seiner multiplikativen Gruppe (K^\times, \cdot) und sei weiter $H := \{a^2 \mid a \in K^\times\}$. Zeigen Sie:

- a** H ist eine Untergruppe von (K^\times, \cdot) ,
- b** $H = K^\times$, falls $\text{char } K = 2$,
- c** H hat Index 2 in K^\times , falls $\text{char } K > 2$.

Aufgabe 4 → S. 85

12 Punkte

Sei $f = X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f .

- a** Zeigen Sie: $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ eine Basis des \mathbb{Q} -Vektorraums $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist.
- b** Schreiben Sie $(\alpha + 1)^{-1}$ als Linearkombination mit rationalen Koeffizienten bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 5 → S. 85

12 Punkte

Sei $K|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung vom Grad 55 mit nicht-abelscher Galois-Gruppe. Zeigen Sie: Es gibt genau einen echten Zwischenkörper L von $K|\mathbb{Q}$, sodass $L|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist. Bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 86

12 Punkte

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei

$$G = \text{SL}_n(K) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, K) \mid \det A = 1\}$$

die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen mit Einträgen aus K und Determinante 1. Wir betrachten die Abbildung

$$F: \text{Mat}(n \times n, K) \rightarrow \text{Mat}(n \times n, K), \quad F((a_{ij})) = (a_{ij}^p).$$

Zeigen Sie $F(G) \subseteq G$ und dass $F|_G: G \rightarrow G$ ein Homomorphismus von Gruppen ist. Folgern Sie daraus, dass $H = \{g \in G \mid F(g) = g\}$ eine Untergruppe von G ist, und bestimmen Sie diese Untergruppe.

Aufgabe 2 → S. 87

12 Punkte

Man zeige:

- a** S_5 hat genau sechs 5-Sylowuntergruppen.
- b** S_6 hat eine zu S_5 isomorphe und transitiv auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ operierende Untergruppe.
- c** S_6 hat zwei zu S_5 isomorphe Untergruppen, die nicht zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 3 → S. 90

12 Punkte

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und $S = \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Man zeige, dass es keinen Ringhomomorphismus $\phi: R \rightarrow S$ gibt.

Hinweis Ringhomomorphismen $R \rightarrow S$ bilden definitionsgemäß 1_R auf 1_S ab.

Aufgabe 4 → S. 90

12 Punkte

Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und $\mu_A(X) \in K[X]$ das Minimalpolynom einer Matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$. Sei $f(X) \in K[X]$ ein Polynom, das zu $\mu_A(X)$ teilerfremd ist. Man zeige, dass die Matrix $f(A)$ invertierbar ist.

Aufgabe 5 → S. 91

12 Punkte

Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Man zeige, dass das Polynom $X^2 + X + 1$ genau dann irreduzibel über K ist, wenn $q \equiv -1 \pmod{3}$.

Lösungen zu Thema Nr. 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T1A1)

a Sei $\tau \in G_{L|\mathbb{Q}}$, dann ist $\tau G_{L|\mathbb{Q}} = G_{L|\mathbb{Q}}$ und es gilt für jedes $x \in L$, dass

$$\begin{aligned} \tau(N(x)) &= \tau \left(\prod_{\sigma \in G_{L|\mathbb{Q}}} \sigma(x) \right) = \prod_{\sigma \in G_{L|\mathbb{Q}}} \tau(\sigma(x)) = \\ &= \prod_{\sigma \in \tau G_{L|\mathbb{Q}}} \sigma(x) = \prod_{\sigma \in G_{L|\mathbb{Q}}} \sigma(x) = N(x). \end{aligned}$$

Da τ beliebig aus $G_{L|\mathbb{Q}}$ war, wird $N(x)$ von der gesamten Gruppe $G_{L|\mathbb{Q}}$ fixiert, d. h. $N(x)$ liegt im Fixkörper $L^{G_{L|\mathbb{Q}}} = \mathbb{Q}$. Sei zusätzlich $y \in L$, dann gilt

$$\begin{aligned} N(xy) &= \prod_{\sigma \in G_{L|\mathbb{Q}}} \sigma(xy) = \prod_{\sigma \in G_{L|\mathbb{Q}}} \sigma(x) \cdot \sigma(y) = \\ &= \left(\prod_{\sigma \in G_{L|\mathbb{Q}}} \sigma(x) \right) \cdot \left(\prod_{\sigma \in G_{L|\mathbb{Q}}} \sigma(y) \right) = N(x) \cdot N(y). \end{aligned}$$

b Das Minimalpolynom von $\sqrt{5}$ über \mathbb{Q} ist $f = X^2 - 5$, denn dieses Polynom ist normiert, irreduzibel nach Eisenstein und hat $\sqrt{5}$ als Nullstelle. Daraus folgt

$$|G_{L|\mathbb{Q}}| = [L : \mathbb{Q}] = \text{grad } f = 2$$

sowie, dass $\{1, \sqrt{5}\}$ eine \mathbb{Q} -Basis von L ist. Jedes Element in L hat also eine Darstellung als $r + s\sqrt{5}$ für gewisse $r, s \in \mathbb{Q}$. Sei $G_{L|\mathbb{Q}} = \{\text{id}_L, \sigma\}$. Da ein \mathbb{Q} -Automorphismus eine Nullstelle von f wieder auf eine Nullstelle von f abbilden muss, muss $\sigma(\sqrt{5}) \in \{\pm\sqrt{5}\}$ gelten. Da $\{1, \sqrt{5}\}$ eine \mathbb{Q} -Basis von L ist, wird σ durch das Bild $\sigma(\sqrt{5})$ bereits eindeutig bestimmt. Im Fall $\sigma \neq \text{id}_L$ muss daher $\sigma(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$ sein. Damit haben wir:

$$\begin{aligned} N(r + s\sqrt{5}) &= \prod_{\tau \in G_{L|\mathbb{Q}}} \tau(r + s\sqrt{5}) = \text{id}_L(r + s\sqrt{5}) \cdot \sigma(r + s\sqrt{5}) = \\ &= (r + s\sqrt{5})(r - s\sqrt{5}) = r^2 - 5s^2. \end{aligned}$$

c „ \Rightarrow “ : Sei $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]^\times$, dann gibt es ein $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ mit $xy = 1$ und man berechnet

$$1 \stackrel{\text{b}}{=} N(1) = N(xy) \stackrel{\text{a}}{=} N(x) \cdot N(y).$$

Da $x = r + s\sqrt{5}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$, ist $N(x) = r^2 - 5s^2$ eine ganze Zahl. Also zeigt obige Gleichung, dass $N(x) \in \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$.

„ \Leftarrow “: Sei umgekehrt $N(x) \in \{\pm 1\}$ für $x = r + s\sqrt{5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ vorausgesetzt, dann folgt aus

$$\pm 1 = N(x) = (r + s\sqrt{5})(r - s\sqrt{5}),$$

dass $y = \pm(r - s\sqrt{5})$ das multiplikative Inverse von x in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist. Insbesondere gilt $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]^\times$.

d Wäre 11 ein Primelement in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, so würde aus der Gleichung

$$11 = 16 - 5 = (4 + \sqrt{5}) \cdot (4 - \sqrt{5})$$

folgen, dass 11 ein Teiler von $(4 + \sqrt{5})$ oder $(4 - \sqrt{5})$ ist. Gäbe es allerdings ein $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ mit $11x = 4 \pm \sqrt{5}$, so liefert Anwenden der Norm:

$$11 = N(4 \pm \sqrt{5}) = N(11x) = N(11) \cdot N(x) = 11^2 \cdot N(x) \Leftrightarrow N(x) = \frac{1}{11}$$

Dies widerspricht jedoch $N(x) \in \mathbb{Z}$. Also kann 11 kein Primelement in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ sein.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T1A2)

a Wir berechnen zunächst:

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2 &= \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{2 - \sqrt{3}} + (2 - \sqrt{3}) = \\ &= (2 + \sqrt{3}) - 2\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} + (2 - \sqrt{3}) = \\ &= -2 \cdot \sqrt{1} + 4 = 2 \end{aligned}$$

Aus der Rechnung folgt $\alpha - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \in \{\pm\sqrt{2}\}$. Wegen

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} < \sqrt{2 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

ist $\alpha - \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

b Wir rechnen wieder:

$$\alpha^2 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow (\alpha^2 - 2)^2 = 3 \Leftrightarrow \alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 = 0$$

Somit ist $f = X^4 - 4X^2 + 1$ unser Kandidat für das Minimalpolynom von α über \mathbb{Q} . Sei g das Minimalpolynom, dann folgt aus $f(\alpha) = 0$ schon mal $g \mid f$ und damit $\text{grad } g \leq 4$. Wir zeigen nun $\text{grad } g = 4$, indem wir $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \geq 4$ nachweisen. Es sind dann nämlich f und g normierte Polynome gleichen Grades, sodass aus $g \mid f$ bereits $g = f$ folgt.

Bemerke zunächst

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 1 &\Rightarrow \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha) \\ \alpha^2 = 2 + \sqrt{3} &\Rightarrow \sqrt{3} = \alpha^2 - 2 \in \mathbb{Q}(\alpha).\end{aligned}$$

Aus Teil **a** folgt außerdem $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Wir haben somit $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$. Wegen $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ folgt aus der Gradformel, dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ von 2 geteilt wird. Wäre $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$, so hätten wir

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Jedoch ist $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, denn sonst gäbe es $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{3} = r + s\sqrt{2}$ und es würde folgen

$$3 = (r + s\sqrt{2})^2 = r^2 + 2s^2 + 2rs\sqrt{2}.$$

Die lineare Unabhängigkeit von 1 und $\sqrt{2}$ über \mathbb{Q} beschert uns $2rs = 0$. Im Fall $s = 0$ hätten wir $3 = r^2$, obwohl 3 kein Quadrat in \mathbb{Q} ist, und im Fall $r = 0$ hätten wir $3 = 2s^2$, obwohl $\frac{3}{2}$ kein Quadrat in \mathbb{Q} ist. Daher kann nicht $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$ sein, sondern der Erweiterungsgrad muss mindestens gleich dem nächst größeren Vielfachen von 2, nämlich 4, sein.

c Sei h das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Mit den Ergebnissen aus Teil **b** haben wir

$$\text{grad } h = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = \frac{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ein passendes Polynom von Grad 2 liefert uns die Gleichung aus Teil **a**:

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 - \sqrt{2}\alpha - 1 = 0.$$

Es ist daher $h = X^2 - \sqrt{2}X - 1$.

d Natürlich ist $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Wegen $|G_{L|\mathbb{Q}}| = [L : \mathbb{Q}] = 4$ ist $G_{L|\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $G_{L|\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wäre $G_{L|\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, so hätte $G_{L|\mathbb{Q}}$ nur genau eine Untergruppe von Index 2 und damit die Erweiterung $L|\mathbb{Q}$ nur genau einen quadratischen Zwischenkörper. Wir haben allerdings in Teil **b**

gesehen, dass $L|\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ mindestens zwei verschiedene quadratische Zwischenkörper besitzt. Folglich ist $G_{L|\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Möchte man die Automorphismen in $G_{L|\mathbb{Q}}$ explizit bestimmen, so kann man das mithilfe des Fortsetzungssatzes tun: Ein \mathbb{Q} -Automorphismus von $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ muss α wieder auf eine Nullstelle des Minimalpolynoms f abbilden. Die vier Automorphismen von $G_{L|\mathbb{Q}}$ sind daher anhand der Abbildungsvorschriften

$$\text{id}: \alpha \mapsto \alpha, \quad \sigma_1: \alpha \mapsto -\alpha, \quad \sigma_2: \alpha \mapsto \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \quad \sigma_3: \alpha \mapsto -\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

eindeutig bestimmt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T1A3)

Sei G eine Gruppe der Ordnung $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ und ν_5 die Anzahl ihrer 5-Sylowgruppen. Laut dem Dritten Sylowsatz gilt dann

$$\nu_5 \mid (2^2 \cdot 3) \quad \Rightarrow \quad \nu_5 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$$

sowie $\nu_5 \equiv 1 \pmod{5}$, was $\nu_5 \in \{1, 6\}$ liefert. Angenommen, G wäre eine einfache Gruppe. Dann muss $\nu_5 \neq 1$ sein, denn in diesem Fall wäre die einzige 5-Sylowgruppe ein nicht-trivialer Normalteiler. Folglich muss $\nu_5 = 6$ sein. Lassen wir nun G mittels

$$G \times \text{Syl}_5 \rightarrow \text{Syl}_5, \quad (g, P) \mapsto gPg^{-1}$$

auf der Menge seiner 5-Sylowgruppen Syl_5 operieren, so liefert dies laut Proposition 1.15 (1) einen Homomorphismus $\phi: G \rightarrow S_6$.

Wäre $\ker \phi = \{e\}$, so wäre ϕ injektiv und wir hätten $G \cong \phi(G) \subseteq S_6$. Nach dem Satz von Lagrange müsste insbesondere $|G| = 300$ ein Teiler von $|S_6| = 720$ sein.

Wäre $\ker \phi = G$, so wäre der Homomorphismus ϕ trivial, d. h. $\phi(g) = \text{id}$ für alle $g \in G$, was gleichbedeutend zu $gPg^{-1} = P$ für alle $g \in G$ und alle 6-Sylowgruppen P ist. Das ist jedoch gerade die Bedingung dafür, dass P ein Normalteiler von G ist, was wiederum unmöglich ist, da G einfach ist.

Es bleibt nur, dass $\ker \phi \neq \{e\}$ und $\ker \phi \neq G$. Dies zeigt aber, dass $\ker \phi$ ein nicht-trivialer Normalteiler von G ist. Widerspruch dazu, dass G einfach ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T1A4)

- a** Wir zeigen die Aussage per Kontraposition. Sei $p \geq 3$ eine Primzahl, dann hat die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ die Ordnung $\varphi(p) = p - 1$. Wegen $p \geq 3$ ist 2 teilerfremd zu p , sodass 2 eine Einheit modulo p ist, und aus dem Kleinen Satz von Fermat folgt

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

- b** Laut dem Chinesischen Restsatz ist die Abbildung

$$\phi: \mathbb{Z}/341\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}, \quad a \mapsto (a \pmod{11}, a \pmod{31})$$

ein Isomorphismus. Es genügt daher zu zeigen, dass $2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$ und $2^{340} \equiv 1 \pmod{31}$. Dies rechnen wir nach:

$$2^{340} = (2^{10})^{34} \stackrel{\mathbf{a}}{\equiv} 1 \pmod{11}$$

$$2^{340} = 2^{330} \cdot 2^{10} \stackrel{\mathbf{a}}{\equiv} 1 \cdot (32)^2 \equiv 1 \cdot 1^2 \equiv 1 \pmod{31}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T1A5)

- a** Sei $a \in \overline{\mathbb{F}_p}$ eine Nullstelle von χ_A , dann ist χ_A als irreduzibles und normiertes Polynom das Minimalpolynom von a über \mathbb{F}_p . Es folgt

$$[\mathbb{F}_p(a) : \mathbb{F}_p] = \text{grad } \chi_A = n,$$

sodass $\mathbb{F}_p(a) = \mathbb{F}_{p^n}$. Aus dem Kapitel über endliche Körper ist bekannt, dass $\mathbb{F}_{p^n} | \mathbb{F}_p$ eine normale Erweiterung ist, daher folgt aus $a \in \mathbb{F}_{p^n}$ für die Nullstelle a von χ_A , dass χ_A über \mathbb{F}_{p^n} in Linearfaktoren zerfällt. Zudem ist die Erweiterung $\mathbb{F}_{p^n} | \mathbb{F}_p$ nach Proposition 3.12 separabel, weswegen χ_A nur einfache Nullstellen in \mathbb{F}_{p^n} hat. Da die geometrische Vielfachheit jeweils höchstens gleich der algebraischen Vielfachheit ist, müssen sie in diesem Fall bereits gleich sein und alle Voraussetzungen dafür, dass A diagonalisierbar über \mathbb{F}_{p^n} ist, sind erfüllt.

- b** Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom von A :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det \begin{pmatrix} -1 - X & 3 & -1 \\ 0 & -X & 1 \\ 1 & 0 & -X \end{pmatrix} = \\ &= -X^2(X+1) + 3 - X = -X^3 - X^2 - X + 3. \end{aligned}$$

Man sieht, dass 1 eine Nullstelle dieses Polynoms ist. Mittels Polynomdivision gewinnt man

$$\chi_A = -(X-1)(X^2 + 2X + 3).$$

Der zweite Faktor hat in \mathbb{F}_5 keine Nullstellen und ist deswegen in $\mathbb{F}_5[X]$ irreduzibel. Nehmen wir an, A ist über \mathbb{F}_{125} diagonalisierbar. Dann zerfällt χ_A über \mathbb{F}_{125} in Linearfaktoren. Sei $a \in \mathbb{F}_{125}$ eine Nullstelle des zweiten Faktors. Es gilt dann für den Zwischenkörper $\mathbb{F}_5(a)$

$$[\mathbb{F}_5(a) : \mathbb{F}_5] = 2 \quad \text{teilt} \quad 3 = [\mathbb{F}_{125} : \mathbb{F}_5],$$

was einen Widerspruch bedeutet. Andererseits zerfällt χ_A über \mathbb{F}_{25} in Linearfaktoren: Sei $a \in \overline{\mathbb{F}_5}$ eine Nullstelle des zweiten Faktors. Dann ist $\mathbb{F}_5(a)$ ein Körper mit 25 Elementen, also ist $\mathbb{F}_5(a) = \mathbb{F}_{25}$. Da Erweiterungen vom Grad 2 stets normal sind, zerfällt also der zweite Faktor (und damit χ_A) über \mathbb{F}_{25} in Linearfaktoren.

Das charakteristische Polynom χ_A hat keine doppelten Nullstellen, denn im zweiten Faktor tritt 1 nicht als Nullstelle auf und da $\mathbb{F}_{25}|\mathbb{F}_5$ separabel ist, ist auch a keine doppelte Nullstelle. Aus analoger Argumentation wie in Teil **a** stimmen also für alle Eigenwerte die algebraische und geometrische Vielfachheit überein und A ist über \mathbb{F}_{25} diagonalisierbar.

Lösungen zu Thema Nr. 2

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T2A1)

Sei G eine einfache Gruppe mit $|G| = 660 = 11 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3$. Jedes Element der Ordnung 11 von G erzeugt eine Untergruppe der Ordnung 11, also eine 11-Sylowgruppe P . Nehmen wir an, es gibt eine weitere 11-Sylowgruppe P' mit $g \in P$, so folgt daraus $P = \langle g \rangle \subseteq P'$ und da P und P' gleiche Ordnung haben, erhalten wir $P = P'$. Das bedeutet, jedes Element der Ordnung 11 liegt in genau einer 11-Sylowgruppe. Wir bestimmen daher nun die Anzahl ν_{11} der 11-Sylowgruppen von G .

Nach dem Dritten Sylowsatz ist $\nu_{11} \mid 5 \cdot 2^2 \cdot 3$ und daher

$$\nu_{11} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}.$$

Die zweite Bedingung $\nu_{11} \equiv 1 \pmod{11}$ liefert $\nu_{11} \in \{1, 12\}$. Wäre $\nu_{11} = 1$, so wäre die 11-Sylowgruppe ein Normalteiler von G , was nicht möglich ist, da G laut Voraussetzung eine einfache Gruppe ist, also keinen nicht-trivialen Normalteiler besitzt. Somit muss $\nu_{11} = 12$ gelten.

Da in jeder 11-Sylowgruppe das Neutralelement sowie 10 Element der Ordnung 11 liegen, besitzt G insgesamt

$$12 \cdot 10 = 120$$

Elemente der Ordnung 11.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T2A2)

a Wir zeigen, dass $\text{ord } g = n$, denn dann ist $|\langle g \rangle| = \text{ord } g = n$, sodass aus $\langle g \rangle \subseteq G$ bereits $G = \langle g \rangle$ folgen muss.

Wir wissen, dass $\text{ord } g$ ein Teiler der Gruppenordnung n sein muss. Angenommen, es ist $\text{ord } g$ ein echter Teiler, d.h. es gibt ein $k \geq 2$ mit $n = k \cdot \text{ord } g$. Wegen $k \geq 2$ hat k einen Primteiler p und wir haben $\frac{n}{p} = \frac{k}{p} \cdot \text{ord } g$, wobei $\frac{k}{p}$ eine ganze Zahl ist. Es folgt

$$g^{n/p} = g^{\frac{k}{p} \cdot \text{ord } g} = \left(g^{\text{ord } g}\right)^{k/p} = 1^{k/p} = 1$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

b Wir zeigen die Aussage stupide durch vollständige Induktion über m .

Induktionsanfang $m = 0$: Es gilt $4^{3^0} = 4^1 = 1 + 3^1$, also ist die Aussage für diesen Fall erfüllt.

Induktionsschritt $m \mapsto m + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$4^{3^m} = 1 + 3^{m+1} + k3^{m+2}.$$

Unter Verwendung von $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ berechnet man nun

$$\begin{aligned} 4^{3^{m+1}} &= (1 + 3^{m+1} + k3^{m+2})^3 = \\ &= (1 + 3^{m+1})^3 \\ &\quad + 3(1 + 3^{m+1})^2 \cdot k3^{m+2} + 3(1 + 3^{m+1}) \cdot (k3^{m+2})^2 + (k3^{m+2})^3 \equiv \\ &\equiv (1 + 3^{m+1})^3 \pmod{3^{m+3}}. \end{aligned}$$

Und der Spaß geht noch weiter:

$$\begin{aligned} (1 + 3^{m+1})^3 &\equiv 1^3 + 3 \cdot 3^{m+1} + 3 \cdot (3^{m+1})^2 + (3^{m+1})^3 \equiv \\ &\equiv 1 + 3^{m+2} \pmod{3^{m+3}}. \end{aligned}$$

Insgesamt also $4^{3^{m+1}} \equiv 1 + 3^{m+2} \pmod{3^{m+3}}$, wie gewünscht.

- c** Die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/3^e\mathbb{Z})^\times$ ist eine Gruppe der Ordnung $\varphi(3^e) = 2 \cdot 3^{e-1}$. Wir wollen nun Aufgabenteil **a** mit $n = 2 \cdot 3^{e-1}$ anwenden und berechnen daher:

$$2^{n/3} = 2^{2 \cdot 3^{e-2}} = 4^{3^{e-2}} \stackrel{\text{b}}{\equiv} 1 + 3^{e-1} \not\equiv 1 \pmod{3^e}$$

Um auch $2^{n/2} \not\equiv 1 \pmod{3^e}$ zu sehen, betrachten wir $2^{n/2}$ zunächst modulo 3:

$$2^{n/2} = 2^{3^{e-1}} \equiv (-1)^{3^{e-1}} \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$$

Dabei ging ein, dass 3^{e-1} immer ungerade ist. Wäre nun $2^{n/2} \equiv 1 \pmod{3^e}$, so wäre insbesondere $2^{n/2} \equiv 1 \pmod{3}$ im Widerspruch zur obigen Rechnung, also ist $2^{n/2} \not\equiv 1 \pmod{3}$.

Anwendung von Teil **a** liefert nun $\langle 2 \rangle = (\mathbb{Z}/3^e\mathbb{Z})^\times$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T2A3)

- a** Bei H handelt es sich um das Bild der Abbildung $\tau: K^\times \rightarrow H, a \mapsto a^2$. Da Bildmengen von Homomorphismen stets Untergruppen sind, folgt die Aussage aus der Gleichung

$$\tau(ab) = (ab)^2 = a^2b^2 = \tau(a)\tau(b) \quad \text{für } a, b \in K^\times.$$

Alternative: Man kann die Untergruppen-Eigenschaften auch direkt prüfen.

- b** Sei τ wie in Teil **a** definiert. In Charakteristik 2 gilt

$$a \in \ker \tau \Leftrightarrow a^2 = \bar{1} \Leftrightarrow a^2 - \bar{1} = 0 \Leftrightarrow (a - \bar{1})^2 = 0 \Leftrightarrow a = \bar{1}.$$

Also ist der Kern von τ trivial und τ ist eine Bijektion zwischen K^\times und H . Daraus folgt insbesondere $|H| = |K^\times|$ und zusammen mit $H \subseteq K^\times$ ergibt dies $H = K^\times$.

- c** Ist $\text{char } K > 2$, so gilt $-1 \neq 1$ und wir erhalten

$$a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1) = 0 \Leftrightarrow a \in \{1, -1\}.$$

Damit ist $\ker \tau = \{\pm 1\}$ und der Homomorphiesatz liefert

$$\left| K^\times / \{\pm 1\} \right| = |H| \Leftrightarrow |K^\times| = 2|H|.$$

Dies ergibt

$$(K^\times : H) = \frac{2|H|}{|H|} = 2.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T2A4)

- a** Das normierte Polynom f ist laut dem Eisensteinkriterium mit $p = 2$ irreduzibel, also das Minimalpolynom von α . Wir zeigen nun, dass $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit nehmen wir an, es gibt $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ mit $a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$. Wäre $a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$, so wäre $g = a_2X^2 + a_1X + a_0$ ein Polynom vom Grad ≤ 2 , das die Nullstelle α hat – im Widerspruch dazu, dass f das Minimalpolynom von α ist. Aus $a_1 = a_2 = 0$ und der Gleichung folgt auch $a_0 = 0$ und somit die lineare Unabhängigkeit von $\{1, \alpha, \alpha^2\}$.

Jedes Element $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ hat die Form $\beta = g(\alpha)$ für ein Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$. Division mit Rest von g durch f liefert $g = fq + h$ für Polynome $q, h \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\text{grad } h \leq 2$. Schreibe $h = a_2X^2 + a_1X + a_0$, so gilt

$$\beta = f(\alpha)q(\alpha) + h(\alpha) = h(\alpha) = a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$$

und β ist eine \mathbb{Q} -Linearkombination von $\{1, \alpha, \alpha^2\}$. Damit ist $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}(\alpha)$.

- b** Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 = f(\alpha) &\Leftrightarrow 1 = \alpha^3 + 2\alpha + 3 &\Leftrightarrow 1 = (\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 3) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha + 1} = \alpha^2 - \alpha + 3 \end{aligned}$$

Alternative: Der Ansatz $(a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0)(\alpha + 1) = 1$ mit rationalen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ liefert aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $1, \alpha, \alpha^2$ ein lineares Gleichungssystem für a_0, a_1, a_2 , das gelöst werden kann.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T2A5)

Sei $G_{K|\mathbb{Q}}$ die Galois-Gruppe der Erweiterung $K|\mathbb{Q}$. Laut Angabe hat diese die Ordnung $55 = 5 \cdot 11$. Gemäß dem Hauptsatz der Galois-Theorie korrespondieren die Zwischenkörper der Erweiterung $K|\mathbb{Q}$ eindeutig zu den Untergruppen der Galois-Gruppe und für einen Zwischenkörper L ist $L|\mathbb{Q}$ genau dann normal (und somit galoissch), wenn die zugehörige Untergruppe

ein Normalteiler von $G_{K|Q}$ ist.

Da die Ordnung einer Untergruppe von $G_{K|Q}$ laut dem Satz von Lagrange ein Teiler von 55 sein muss, kommen für nicht-triviale Untergruppen nur die Ordnungen 5 oder 11 in Betracht. Bei diesen Untergruppen handelt es sich genau um die Sylowgruppen von $G_{K|Q}$, sodass wir ihre Anzahl mit dem Dritten Sylowsatz bestimmen können.

Aus diesem folgt, dass $G_{K|Q}$ genau eine 11-Sylowgruppe P_{11} hat, die deshalb ein Normalteiler ist. Laut der Vorbemerkung ist für den korrespondierenden Zwischenkörper L die Erweiterung $L|Q$ galoissch und es gilt

$$[L : Q] = (G_{K|Q} : P_{11}) = \frac{55}{11} = 5.$$

Außerdem kann $G_{K|Q}$ eine oder elf 5-Sylowgruppen besitzen. Nehmen wir zunächst an, dass es nur eine 5-Sylowgruppe P_5 gibt. Diese wäre dann ein Normalteiler von $G_{K|Q}$. Da ferner die Ordnungen von P_{11} und P_5 teilerfremd sind, haben diese trivialen Schnitt und die Ordnung des Komplexprodukts ist

$$|P_5 P_{11}| = \frac{|P_5| \cdot |P_{11}|}{|P_5 \cap P_{11}|} = 5 \cdot 11,$$

was $P_5 P_{11} = G_{K|Q}$ impliziert. $G_{K|Q}$ ist also inneres direktes Produkt von P_5 und P_{11} und daher isomorph zu $P_5 \times P_{11}$. Nun sind P_5 und P_{11} als Gruppen von Primzahlordnung jedoch zyklisch, also ist ihr Produkt abelsch – Widerspruch zur Voraussetzung, dass $G_{K|Q}$ eine nicht-abelsche Gruppe ist. Somit ist keine der 5-Sylowgruppen ein Normalteiler von $G_{K|Q}$ und es gibt keine weitere normale Zwischenerweiterung.

Lösungen zu Thema Nr. 3

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T3A1)

Sei $A = (a_{ij}) \in G$ eine Matrix, dann ist zu zeigen, dass $\det F(A) = 1$ erfüllt ist. Dazu verwenden wir die Leibniz-Formel für die Determinante:

$$\det F(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}^p = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \left(\prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)^p$$

Ist $p > 2$, so ist p ungerade und es gilt $(\operatorname{sgn} \sigma)^p = (\pm 1)^p = (\pm 1) = \operatorname{sgn} \sigma$ für alle $\sigma \in S_n$. Falls $p = \operatorname{char} K = 2$, so ist $1 = -1$ in K und es gilt ebenfalls $(\operatorname{sgn} \sigma)^p = \operatorname{sgn} \sigma$. Zusammen mit *freshman's dream* kann man den Ausdruck

von oben also weiter zu

$$\det F(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)^p \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}^p = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)^p = (\det A)^p = 1$$

umschreiben. Sei nun $B = (b_{ij}) \in G$ eine weitere Matrix, dann gilt

$$F(AB) = \left(\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)^p \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^p b_{kj}^p \right) = F(A) \cdot F(B),$$

also definiert F tatsächlich einen Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow G$.

Wir zeigen als Nächstes, dass H eine Untergruppe von G ist. Sei dazu $\mathbb{E}_n = (\delta_{ij})$ mit dem **Kronecker-Delta** δ_{ij} (also $\delta_{ij} = 0$, falls $i \neq j$ und $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$) die Einheitsmatrix, dann ist

$$F(\mathbb{E}_n) = (\delta_{ij}^p) = (\delta_{ij}) = \mathbb{E}_n,$$

sodass $\mathbb{E}_n \in H$. Falls $A, B \in H$ sind, so ist auch

$$F(AB) = F(A) \cdot F(B) = A \cdot B,$$

da F ein Homomorphismus ist. In gleicher Weise erhält man

$$F(A^{-1}) = F(A)^{-1} = A^{-1}.$$

Dies zeigt, dass mit A und B auch $A \cdot B$ sowie A^{-1} in H liegen. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass H eine Untergruppe von G ist. Es gilt nun

$$A \in H \Leftrightarrow F(A) = A \Leftrightarrow a_{ij}^p = a_{ij} \text{ für alle } (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2,$$

also sind alle Koeffizienten von A Nullstellen des Polynoms $X^p - X \in K[X]$. Aus dem Kapitel über endliche Körper ist bekannt, dass die Nullstellenmenge dieses Polynoms genau der Primkörper $P \cong \mathbb{F}_p$ von K ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T3A2)

a Sei ν_5 die Anzahl der 5-Sylowgruppen von S_5 , dann liefert der Dritte Sylowsatz, dass

$$\nu_5 \mid (2^3 \cdot 3) \Rightarrow \nu_5 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

und mit der zusätzlichen Bedingung $\nu_5 \equiv 1 \pmod{5}$ bleibt nur $\nu_5 \in \{1, 6\}$.

Angenommen, es wäre $\nu_5 = 1$, dann gäbe es nur eine 5-Sylowgruppe in S_5 , bestehend aus id und 4 Elementen der Ordnung 5. Jedoch ist jeder 5-Zykel ein Element der Ordnung 5 und davon gibt es nach der Formel von Seite 60 genau

$$\binom{5}{5} (5-1)! = 4! = 24.$$

Da jedes davon in einer 5-Sylowgruppe liegt, muss es mehr als eine Sylowgruppe geben. Es bleibt daher nur $\nu_5 = 6$.

- b** Wir lassen S_5 per Konjugation auf der Menge Syl_5 seiner 5-Sylowgruppen operieren. Dies liefert gemäß Proposition 1.15 (1) einen Homomorphismus

$$\phi: S_5 \rightarrow S_6.$$

Wir zeigen nun, dass ϕ injektiv ist, denn dann ist $S_5 \cong \phi(S_5)$ und da S_5 laut dem Zweiten Sylowsatz transitiv auf Syl_5 operiert, operiert $\phi(S_5)$ transitiv auf $\{1, \dots, 6\}$.

Sei $\sigma \in \ker \phi$, dann gilt $\sigma P \sigma^{-1} = P$ für alle $P \in \text{Syl}_5$, d. h. σ liegt in $\bigcap_{P \in \text{Syl}_5} N_{S_5}(P)$, dem Schnitt über alle Normalisatoren. Laut 1.17 gilt

$$|N_{S_5}(P)| = \frac{|S_5|}{|S_5(P)|} = \frac{120}{6} = 20$$

für alle $P \in \text{Syl}_5$, wobei wir verwendet haben, dass S_5 transitiv auf Syl_5 operiert und deshalb für die Bahn $|S_5(P)| = \nu_5 = 6$ gilt. Wegen $\ker \phi \subseteq N_{S_5}(P)$ muss daher $|\ker \phi|$ ein Teiler von 20 sein.

Angenommen, $|\ker \phi|$ wird von 5 geteilt, dann gibt es nach dem Nullten Sylowsatz 1.26 ein Element der Ordnung 5 in $\ker \phi$, also einen 5-Zykel. Da $\ker \phi$ ein Normalteiler ist, müsste $\ker \phi$ dann die gesamte Konjugationsklasse dieses 5-Zykels enthalten, also alle 5-Zykel. Wir haben oben gesehen, dass deren Anzahl 24 ist. Wegen $|\ker \phi| \leq 20$ können diese also nicht alle in $\ker \phi$ enthalten sein. Also wird $|\ker \phi|$ nicht von 5 geteilt und, da $|\ker \phi|$ ein Teiler von 20 ist, haben wir $|N| \leq 4$.

Analog liefert die Annahme, dass $|\ker \phi|$ von 2 geteilt wird, dass $\ker \phi$ einen 2-Zykel oder eine Doppeltransposition und damit alle Permutationen diesen Zerlegungstyps enthalten muss. Davon gibt es aber

$$\binom{5}{2} = 10 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 15,$$

also ebenfalls zu viele. Es bleibt also nur noch $|\ker \phi| = 1$, d. h. $\ker \phi = \{\text{id}\}$.

c Betrachte die Untergruppe

$$U = \{\sigma \in S_6 \mid \sigma(6) = 6\} \cong S_5.$$

Angenommen, es gibt ein $\tau \in S_6$ mit $\phi(S_5) = \tau U \tau^{-1}$. Sei $a = \tau(6)$, dann würde für alle Elemente $\tau \rho \tau^{-1} \in \tau U \tau^{-1} = \phi(S_5)$ gelten, dass

$$\tau \rho \tau^{-1}(a) = \tau \rho(6) = \tau(6) = a.$$

Dies widerspricht aber der Tatsache, dass $\phi(S_5)$ transitiv auf $\{1, \dots, 6\}$ operiert, es also beispielsweise ein $\iota \in \phi(S_5)$ mit $\iota(6) = 1$ geben muss.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T3A3)

Angenommen, es gibt einen Ringhomomorphismus $\phi: \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \rightarrow \mathbb{Z}[i]$. Aus $\phi(1) = 1$ folgt zunächst induktiv, dass $\phi(m) = m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Sei nun $\xi = \phi(\sqrt{-3})$, dann gilt

$$\xi^2 = \phi(\sqrt{-3})^2 = \phi(\sqrt{-3}^2) = \phi(-3) = -3.$$

Wegen $\xi \in \mathbb{Z}[i]$ gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\xi = a + ib$, sodass

$$-3 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Da -3 eine reelle Zahl ist, muss der Imaginärteil verschwinden, sodass $2ab = 0$ sein muss, d.h. $a = 0$ oder $b = 0$. Falls $a = 0$, so wird obige Gleichung zu $-3 = -b^2$. Diese Gleichung hat jedoch keine ganzzahlige Lösung. Genauso würde man für $b = 0$ die unsinnige Gleichung $-3 = a^2$ erhalten.

Der Widerspruch zeigt, dass es ein solches Element ξ in $\mathbb{Z}[i]$ und damit auch den Homomorphismus $\phi: \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \rightarrow \mathbb{Z}[i]$ nicht geben kann.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T3A4)

Da μ_A und f teilerfremd sind, existieren laut dem Lemma von Bézout Polynome $g, h \in K[X]$, sodass

$$g\mu_A + fh = 1$$

erfüllt ist. Setzen wir die Matrix A in diese Gleichung ein, so erhalten wir

$$\mathbb{E}_n = g(A)\mu_A(A) + f(A)h(A) = f(A)h(A)$$

wegen $\mu_A(A) = 0$. Somit ist $f(A)^{-1} = h(A)$ und $f(A)$ ist insbesondere invertierbar.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T3A5)

Sei $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_q[X]$. Ist q eine Potenz von 3, ist $\text{char } K = 3$, sodass $f(1) = 0$. Insbesondere ist f nicht irreduzibel über \mathbb{F}_q für $\text{char } K = 3$ bzw. $q \equiv 0 \pmod{3}$.

Für $\text{char } K \neq 3$ hat man $f(1) = 3 \neq 0$, sodass 1 in diesem Fall keine Nullstelle ist. Inspiriert von Satz 3.17 (2) hat man jedoch die Gleichung

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1),$$

denn f ist das dritte Kreisteilungspolynom. Ist f also reduzibel, so gibt es eine Nullstelle $a \in \mathbb{F}_q$ von f , für die somit $a^3 = 1$ gelten muss. Daraus folgt, dass die Ordnung von a in \mathbb{F}_q^\times ein Teiler von 3 ist. Wegen $a \neq 1$ muss tatsächlich $\text{ord } a = 3$ sein.

Ist umgekehrt $a \in \mathbb{F}_q^\times$ ein Element der Ordnung 3, so gilt

$$0 = a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

und wegen $a \neq 1$ ist $f(a) = 0$. Wir haben also gezeigt, dass f genau dann reduzibel über \mathbb{F}_q ist, wenn es ein Element der Ordnung 3 in \mathbb{F}_q^\times gibt. Da \mathbb{F}_q^\times eine zyklische Gruppe ist, ist dies genau dann der Fall, wenn 3 die Gruppenordnung $q - 1$ teilt, was

$$q - 1 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow q \equiv 1 \pmod{3}$$

bedeutet. Zusammenfassend:

„ \Rightarrow “: Sei f irreduzibel über \mathbb{F}_q , dann muss $q \not\equiv 0 \pmod{3}$, denn sonst hätte f wie ganz zu Beginn gesehen die Nullstelle 1 und wäre somit reduzibel. Wäre $q \equiv 1 \pmod{3}$, so wäre f nach der Äquivalenz oben ebenfalls reduzibel. Es bleibt daher nur $q \equiv -1 \pmod{3}$.

„ \Leftarrow “: Sei umgekehrt $q \equiv -1 \pmod{3}$, dann ist insbesondere $\text{char } K \neq 3$ und die Äquivalenz oben liefert, dass f irreduzibel über \mathbb{F}_q ist.

Prüfungstermin: Herbst 2017

Thema Nr. 1 (Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 96 (8 Punkte)

Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass das Produkt aller Elemente $\neq 0$ in K gleich -1 ist.

Aufgabe 2 → S. 96 (10 Punkte)

Sei R ein kommutativer unitärer Ring, der den endlichen Körper \mathbb{F}_p enthält. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F: R \rightarrow R$, $F(x) = x^p$ ein Ringhomomorphismus ist. Geben Sie je ein Beispiel für solch einen Ring an, für den $F: R \rightarrow R$

- a** ein Isomorphismus,
- b** kein Isomorphismus

ist (mit Begründung).

Aufgabe 3 → S. 97 (14 Punkte)

Man zeige, dass keine zwei der folgenden Gruppen zueinander isomorph sind:

- a** Die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$,
- b** die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$,
- c** die alternierende Gruppe A_4 und
- d** die Diedergruppe D_6 (Symmetriegruppe des regulären 6-Ecks).

Aufgabe 4 → S. 98 (14 Punkte)

Sei $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{C}, \quad P \mapsto P(\omega).$$

Diese ist ein Ringhomomorphismus (das brauchen Sie nicht zu zeigen).

- a** Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von f als \mathbb{Q} -Vektorraum.
- b** Bestimmen Sie den Kern von f .
- c** Untersuchen Sie, ob der Kern von f ein maximales Ideal in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 5 → S. 98 (14 Punkte)

Sei $K = \mathbb{C}(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{C}[t]$ und $P(X) = X^3 - 2tX + t \in K[X]$. Zeigen Sie, dass P irreduzibel in $K[X]$ ist. .

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)**Aufgabe 1** → S. 98 (8 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine quadratische Matrix $A \in M_n(K)$ heißt nilpotent, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$ existiert. Zeigen Sie:

- a** Ist $A \in M_n(K)$ nilpotent, so gilt für das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = X^n$.
- b** Ist $A \in M_n(K)$ nilpotent und diagonalisierbar, so gilt $A = 0$.

Aufgabe 2 → S. 99 (15 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne S_n die n -te symmetrische Gruppe. Die Gruppe S_n und ihre Untergruppen operieren in natürlicher Weise von links auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Ferner sei p eine Primzahl.

- a** Für Untergruppen G_1 und G_2 in S_n sei G_2 ein Normalteiler in G_1 und G_1 operiere transitiv auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass alle G_2 -Bahnen in $\{1, \dots, n\}$ die selbe Länge haben.
- b** Für Untergruppen G_1 und G_2 in S_p sei G_2 ein Normalteiler in G_1 und G_1 operiere transitiv auf $\{1, \dots, p\}$. Zeigen Sie, dass G_2 transitiv auf $\{1, \dots, p\}$ operiert, falls $G_2 \neq \{\text{id}\}$ gilt.
- c** Sei H eine Untergruppe von S_p , die transitiv auf $\{1, \dots, p\}$ operiert und eine Primzahlordnung q hat. Zeigen Sie, dass $p = q$ gilt und H ein Element der Ordnung p enthält.

Aufgabe 3 → S. 100 (14 Punkte)

Ist p eine Primzahl und $q = p^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so bezeichne \mathbb{F}_q den endlichen Körper mit q Elementen. Betrachten Sie die Polynome $f = X^7 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ und $g = X^7 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

- a** Zeigen Sie, dass f keine Nullstellen in den Körper $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4$ und \mathbb{F}_8 besitzt.
- b** Folgern Sie aus **a**, dass f irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$ ist.
- c** Zeigen Sie, dass g irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 4 → S. 100 (15 Punkte)

Sei L der Zerfällungskörper von $X^{12} - 729 \in \mathbb{Q}[X]$ in \mathbb{C} und ζ die primitive 12-te Einheitswurzel $\exp(2\pi i/12) = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \in \mathbb{C}$.

- a** Zeigen Sie: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\zeta)$ und $L = \mathbb{Q}(\zeta)$.
- b** Zeigen Sie, dass $G_{L|\mathbb{Q}}$ eine abelsche Gruppe der Ordnung vier ist, die genau drei Elemente der Ordnung zwei enthält.
- c** Beschreiben Sie alle echten Zwischenkörper der Erweiterung $L|\mathbb{Q}$, indem Sie für jeden echten Zwischenkörper ein primitives Element angeben.

Aufgabe 5 → S. 102 (8 Punkte)

Das irreduzible Polynom $f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ besitze eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sei L der Zerfällungskörper von f in \mathbb{C} . Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $G_{L|\mathbb{Q}}$ nicht abelsch ist.

Thema Nr. 3 (Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 102 (12 Punkte)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 992 = 2^5 \cdot 31$. Für eine Primzahl p bezeichne n_p die Anzahl der p -Sylowgruppen von G .

- a** Geben Sie die prinzipiellen Möglichkeiten für die Werte von n_2 und n_{31} an, die sich aus den Sylowsätzen ergeben.
- b** Zeigen Sie (ohne den Satz von Burnside zu benutzen), dass G auflösbar ist.

Aufgabe 2 → S. 103 (12 Punkte)

Sei G eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe. Ist die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \mid na = 0 \text{ für alle } a \in G\}$$

nicht leer, so heißt deren Minimum der *Exponent* der Gruppe G und wird mit $\exp(G)$ bezeichnet. Ist die obige Menge leer, so setzt man $\exp(G) = \infty$. Zeigen Sie:

- a** Ist G endlich, so ist $\exp(G) = \max\{\text{ord}(a) \mid a \in G\}$.
- b** Die abelsche Gruppe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ist eine Torsionsgruppe (d. h. zu jedem $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx = 0$) mit $\exp(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \infty$.

Aufgabe 3 → S. 103

(12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $a \in R$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- a** Das Element $1 + aX$ ist eine Einheit im Polynomring $R[X]$.
- b** Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$.

Aufgabe 4 → S. 104

(12 Punkte)

Es sei α eine reelle Zahl $\alpha := \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}} \in \mathbb{R}$, und es sei ζ die dritte Einheitswurzel $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$.

- a** Bestimmen Sie das Minimalpolynom f von α über \mathbb{Q} .
- b** Es sei $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{2}} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für den Zerfällungskörper $L \subseteq \mathbb{C}$ von f in \mathbb{C} gilt $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \zeta)$.
- c** Zeigen Sie, dass die reelle Zahl $\sqrt[3]{2}$ in L liegt, und folgern Sie, dass die Galois-Gruppe $G_{L|\mathbb{Q}}$ einen Normalteiler von Index 6 besitzt.

Aufgabe 5 → S. 105

(12 Punkte)

Es seien K ein Teilkörper von \mathbb{R} und $f \in K[X]$ ein Polynom. Weiter sei $Z \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von f über K . Der Grad $[Z : K]$ sei ungerade. Zeigen Sie, dass dann auch Z ein Teilkörper von \mathbb{R} ist.

Lösungen zu Thema Nr. 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T1A1)

1. *Möglichkeit:* K ist genau die Nullstellenmenge des Polynoms $X^q - X$ mit $q = |K|$. Wir haben die Zerlegung

$$X^{q-1} - 1 = \prod_{a \in K^\times} X - a.$$

Deshalb liefert Koeffizientenvergleich $-1 = (-1)^{|K^\times|} \cdot \prod_{a \in K^\times} a$. Damit ist man dann auch schon fertig, denn falls q ungerade ist, so ist $(-1)^{|K^\times|} = (-1)^{q-1} = 1$, und falls q gerade ist, so muss K Charakteristik 2 haben, sodass in K die Gleichheit $-1 = 1$ gilt.

2. *Möglichkeit:* Sei $b = \prod_{a \in K^\times} a$. Die Abbildung $a \mapsto a^{-1}$ ist eine Bijektion $K^\times \rightarrow K^\times$, deshalb können wir statt dem Produkt über alle $a \in K^\times$ auch genauso gut das Produkt über alle $a^{-1} \in K^\times$ bilden:

$$b = \prod_{a \in K^\times} a = \prod_{a \in K^\times} a^{-1} = \left(\prod_{a \in K^\times} a \right)^{-1} = b^{-1}$$

Es gilt daher $b^2 = 1$, sodass b eine Nullstelle von $X^2 - 1 \in K[X]$ ist. Falls $\text{char } K = 2$, so ist $X^2 - 1 = (X - 1)^2$ und es muss $b = 1$ gelten, wobei $-1 = 1$ im Fall $\text{char } K = 2$ gilt.

Falls $\text{char } K \neq 2$, so handelt es sich bei 1 und -1 um zwei *verschiedene* Nullstellen von $X^2 - 1 \in K[X]$, sodass dies bereits alle Nullstellen dieses Polynoms sind. Daher folgt $b = \pm 1$. Angenommen, es ist $b = 1$. Da $K^\times \rightarrow K^\times$, $a \mapsto -a$ wiederum eine Bijektion ist, hätten wir:

$$-1 = -b = - \prod_{a \in K^\times} a = \prod_{a \in K^\times} -a = \prod_{a \in K^\times} a = b = 1,$$

also $-1 = 1$ im Widerspruch zu $\text{char } K \neq 2$. Es bleibt also nur $b = -1$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T1A2)

Hier hängt die Richtigkeit der Aussage davon ab, was man unter „enthält“ versteht. Wir nehmen im Folgenden an, dass der Aufgabensteller gemeint hat, dass R den Körper \mathbb{F}_p als Unterring enthält, die beiden algebraischen Strukturen also miteinander kompatibel sind.

Wir zeigen zunächst, dass $\text{char } R = p$ gilt. Dazu sei daran erinnert, dass

die Charakteristik eines Ringes als die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ definiert ist, sodass der Homomorphismus

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow R, \quad m \mapsto m \cdot 1_R$$

gerade den Kern $n\mathbb{Z}$ hat. Laut unserer Annahme ist $1_R = 1_{\mathbb{F}_p}$, sodass $p \cdot 1_R = 0$ gilt. Das bedeutet $p\mathbb{Z} \subseteq \ker f$. Da das Ideal $p\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ maximal ist, folgt daraus $\ker f = p\mathbb{Z}$ oder $\ker f = \mathbb{Z}$. Im letzten Fall wäre jedoch $1_R = 0$ im Widerspruch zu $1_{\mathbb{F}_p} \neq 0$.

Um nun zu zeigen, dass F ein Ringhomomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $(a+b)^p = a^p + b^p$ für alle $a, b \in R$ gilt. Wegen

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{p-k} b^k = a^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k + b^p$$

und $\text{char } R = p$ ist also zu zeigen, dass p jeweils $\binom{p}{k}$ teilt, für alle $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Die Bedingung an k stellt sicher, dass k und $p-k$ echt kleiner als p sind. Folglich ist auch jeder Primfaktor in $k!$ und $(p-k)!$ kleiner als p , sodass sich der Faktor p im Zähler von

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!}$$

also nicht kürzt. Somit gilt $p \mid \binom{p}{k}$, wie gewünscht.

a Sei $R = \mathbb{F}_p$, dann gilt für alle $a \in R$, dass $a^p = a$. Insbesondere ist $F: R \rightarrow R$ ein Isomorphismus.

b Sei $R = \mathbb{F}_p[T]$. Angenommen, $F: R \rightarrow R$ wäre surjektiv, dann gäbe es ein Polynom $g \in R$, sodass $F(g) = T$. Da \mathbb{F}_p ein Integritätsbereich ist, berechnen sich die Grade jedoch zu

$$1 = \deg T = \deg g^p = p \cdot \deg g.$$

Dies ist unmöglich, da $\deg g \in \mathbb{Z}$ und $p \geq 2$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T1A3)

a $\not\cong$ **b**: Es gilt

$$(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Diese Gruppe ist also nicht zyklisch, wohingegen $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

a, b $\not\cong$ **c, d**: Da A_4 und D_6 nicht abelsch sind, kann keine dieser beiden Gruppen zu $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ bzw. $(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times$ isomorph sein.

b $\not\cong$ **d**: siehe Aufgabe F10T1A5 (zu finden auf Seite 71).

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T1A4)

a Wir berechnen:

$$\omega^2 = \frac{1}{4}(1 - 3 - 2i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = -\omega - 1$$

Die Rechnung zeigt, dass $\{1, \omega, \omega^2\}$ linear abhängig ist, somit muss \dim im $f \leq 2$ gelten. Wäre $\{1, \omega\}$ eine \mathbb{Q} -linear abhängige Menge, so wäre ω eine rationale Zahl. Jedoch ist

$$\omega^3 = \omega \cdot (-\omega - 1) = -\omega^2(-\omega - 1) = -(-\omega - 1) - \omega = 1$$

und die einzige rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^3 = 1$ ist $q = 1$. Wegen $\omega \neq 1$ haben wir damit gezeigt, dass \dim im $f = 2$.

b In Teil **a** haben wir bereits nachgerechnet, dass $\omega^2 = -\omega - 1$, sodass $g = X^2 + X + 1 \in \ker f$ und auch das zugehörige Ideal $(X^2 + X + 1)$ im Kern von f liegt. Das Polynom g ist als Kreisteilungspolynom (oder nach Anwendung des Reduktionskriteriums in $\mathbb{F}_2[X]$) irreduzibel. Da $\mathbb{Q}[X]$ ein Hauptidealring ist, ist das Ideal $(X^2 + X + 1)$ deshalb ein maximales Ideal und es folgt $\ker f = (X^2 + X + 1)$ oder $\ker f = \mathbb{Q}[X]$. Zweiteres ist wegen $f(1) \neq 0$ unmöglich, also haben wir $\ker f = (X^2 + X + 1)$ gezeigt.

c Bereits in Teil **b** gezeigt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T1A5)

Weil $\mathbb{C}[t]/(t) \cong \mathbb{C}$ ein Integritätsbereich ist, handelt es sich bei (t) um ein Primideal von $\mathbb{C}[t]$ und bei t folglich um ein Primelement. Die Irreduzibilität von P folgt nun aus dem Eisensteinkriterium.

Lösungen zu Thema Nr. 2

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T2A1)

a Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$, dann ist A eine „Nullstelle“ des Polynoms X^m , sodass $\mu \mid X^m$ für das Minimalpolynom $\mu \in K[X]$ von A gilt. Es folgt

$\mu = X^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Im Absatz direkt nach Satz 4.6 wurde gezeigt, dass χ und μ die gleichen Nullstellen (in einem algebraischen Abschluss \bar{K}) haben, sodass χ ebenfalls eine Potenz des Polynoms X sein muss. Wegen $\text{grad } \chi = n$ muss daher $\chi = X^n$ gelten.

- b** Laut Teil **a** ist 0 der einzige Eigenwert von A . Ist A diagonalisierbar, so ist A also ähnlich zur Nullmatrix und muss bereits selbst die Nullmatrix sein.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T2A2)

- a** Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Da G_1 transitiv auf $\{1, \dots, n\}$ operiert, gibt es ein $\sigma \in G_1$ mit $\sigma(i) = j$. Man überprüft nun, dass es sich bei der Abbildung

$$\text{Stab}_{G_2}(i) \rightarrow \text{Stab}_{G_2}(j), x \mapsto \sigma x \sigma^{-1}$$

um einen wohldefinierten Isomorphismus handelt: Sei $x \in \text{Stab}_{G_2}(i)$. Wegen $G_1 \trianglelefteq G_2$ ist $\sigma x \sigma^{-1} \in G_2$, zudem ist $\sigma x \sigma^{-1}(j) = j$ leicht nachgerechnet; zuletzt ist $y \mapsto \sigma^{-1} y \sigma$ eine Umkehrabbildung. Insbesondere sind daher alle Stabilisatoren gleich mächtig und die Behauptung folgt aus Lemma 1.17.

- b** Wegen $G_2 \neq \{\text{id}\}$ gibt es zumindest eine Bahn der Länge > 1 . Da laut Teil **a** alle G_2 -Bahnen von gleicher Mächtigkeit sind, kann somit kein Fixpunkt der Operation existieren. Die Bahnengleichung liefert deshalb:

$$p = |\{1, \dots, p\}| = \sum_{|G_2(x)| > 1} |G_2(x)| = |G_2(1)| \cdot r,$$

wobei r die Anzahl der verschiedenen Bahnen ist. Wegen $|G_2(1)| \neq 1$ muss daher $|G_2(1)| = p$, also $r = 1$ und die Operation transitiv sein.

- c** Aus $|H| = q$ folgt insbesondere $H \neq \{\text{id}\}$. Da H transitiv auf $\{1, \dots, p\}$ operiert, haben wir

$$p = |H(1)| = (H : \text{Stab}_H(1)).$$

Insbesondere ist p ein Teiler von $|H| = q$, was nur für $p = q$ möglich ist. Als Gruppe von Primzahlordnung ist H zyklisch und jeder Erzeuger von H ist per Definition ein Element der Ordnung p .

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T2A3)

a Angenommen, f besitzt eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{F}_4 \cup \mathbb{F}_8$.

1. Fall: $\alpha = 0$ kann nicht eintreten, wie einfaches Einsetzen zeigt.

2. Fall: Falls $\alpha \in \mathbb{F}_4^\times$, so gilt $\alpha^3 = 1$ und damit

$$0 = f(\alpha) = \alpha^7 + \alpha + 1 = 1 \cdot 1 \cdot \alpha + \alpha + 1 = 2\alpha + 1 = 1,$$

was natürlich Unsinn ist.

3. Fall: Falls $\alpha \in \mathbb{F}_8^\times$, so haben wir $\alpha^7 = 1$, also

$$0 = f(\alpha) = \alpha^7 + \alpha + 1 = \alpha + 2 = \alpha,$$

im Widerspruch zu unserer Annahme $\alpha \neq 0$.

b Angenommen, f wäre reduzibel, dann gäbe es nicht-konstante Polynome $g, h \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $f = gh$. Da f keine Nullstelle in \mathbb{F}_2 besitzt, kann keines der Polynome g bzw. h von Grad 1 sein (und damit auch nicht von Grad 6). Mögliche Kombinationen der Grade von g und h sind dann nur noch $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$ und $(5, 2)$. Daher besitzt f einen Teiler von Grad 2 oder 3, welcher irreduzibel ist, da er (wie f) keine Nullstelle in \mathbb{F}_2 besitzt. Sei α eine Nullstelle dieses irreduziblen Teilers, dann ist $\mathbb{F}_2(\alpha) \in \{\mathbb{F}_{2^2}, \mathbb{F}_{2^3}\}$. Natürlich ist α insbesondere eine Nullstelle von f , was jedoch Teil **a** widerspricht.

c Folgt durch Anwenden des Reduktionskriteriums (Satz 2.27).

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T2A4)

a Da es sich bei $\mathbb{Q}(\zeta)$ nach Definition um einen Körper handelt, enthält dieser neben ζ auch $\zeta^{-1} = \bar{\zeta}$. Somit ist auch

$$\zeta + \bar{\zeta} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) + \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\zeta).$$

Um $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass $\mathbb{Q}(\zeta)$ sämtliche Nullstellen von $X^{12} - 729$ enthält und diese $\mathbb{Q}(\zeta)$ über \mathbb{Q} erzeugen. Für den ersten Teil bemerke, dass $729 = 3^6$ und dass die Nullstellen von $X^{12} - 729$ daher durch $\{\sqrt{3}\zeta^k \mid 1 \leq k \leq 12\}$ gegeben sind. Da $\mathbb{Q}(\zeta)$ sowohl ζ als auch $\sqrt{3}$ enthält, enthält es auch die Produkte $\sqrt{3}\zeta^k$ für alle $k \in \{1, \dots, 12\}$. Für den zweiten Teil müssen wir $\mathbb{Q}(\zeta) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}\zeta^k \mid 1 \leq k \leq 12)$ nachweisen. Dies folgt aus

$$(\sqrt{3}\zeta) \cdot (\sqrt{3}\zeta^{12})^{-1} = \zeta.$$

b Laut Satz 3.18 haben wir

$$G_{L|\mathbb{Q}} \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Die rechte Gruppe hat Exponent 2, daher hat jedes nicht-triviale Element in $G_{L|\mathbb{Q}}$ Ordnung 2 – also genau drei an der Zahl.

c Wegen $[L : \mathbb{Q}] = 4$ hat jeder echte Zwischenkörper von $L|\mathbb{Q}$ Grad 2 über \mathbb{Q} und korrespondiert somit zu einer Untergruppe von Ordnung 2 von $G_{L|\mathbb{Q}}$. Eine solche Untergruppe besteht aus id und einem Element der Ordnung 2, deshalb folgt aus Teil **b**, dass es genau drei solche Untergruppen gibt. Wir suchen also drei quadratische Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta)$. Mit $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ haben wir in Teil **a** bereits einen gefunden.

Wir beschreiben nun ausführlich, wie man systematisch die beiden anderen Zwischenkörper findet. Ist $\sigma \in G_{L|\mathbb{Q}}$, dann muss $\sigma(\zeta)$ wieder eine primitive zwölfte Einheitswurzel sein (beispielsweise da σ eine Nullstelle des Kreisteilungspolynoms Φ_{12} wiederum auf eine Nullstelle von Φ_{12} abbilden muss). Wir vermuten daher, dass $G_{L|\mathbb{Q}}$ aus den Automorphismen $\text{id}, \sigma_1, \sigma_2$ und σ_3 besteht, wobei

$$\sigma_1(\zeta) = \zeta^5, \quad \sigma_2(\zeta) = \zeta^7, \quad \sigma_3(\zeta) = \zeta^{11}.$$

Die Existenz dieser Automorphismen folgt dabei aus dem Fortsetzungssatz. Die quadratischen Zwischenkörper von $L|\mathbb{Q}$ sind nun genau die Fixkörper dieser drei Automorphismen. Wegen

$$\sigma_3(\sqrt{3}) = \sigma_3(\zeta + \zeta^{11}) = \zeta + \zeta^{11} = \sqrt{3}$$

gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq L^{(\sigma_3)}$. Wegen $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2 = [L^{(\sigma_3)} : \mathbb{Q}]$ folgt daraus bereits $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = L^{(\sigma_3)}$. Die gleiche Idee beschert uns

$$\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^5) \subseteq L^{(\sigma_1)} \quad \text{sowie} \quad \mathbb{Q}\left((\zeta + \zeta^5) \cdot (\zeta + \zeta^{11})\right) \subseteq L^{(\sigma_2)}.$$

Um in beiden Fällen mithilfe des gleichen Gradarguments wie eben Gleichheit zu bekommen, genügt es, $\zeta + \zeta^5 \notin \mathbb{Q}$ und $(\zeta + \zeta^5) \cdot (\zeta + \zeta^{11}) \notin \mathbb{Q}$ zu zeigen. Dazu berechnen wir zunächst

$$\zeta^5 = \exp\left(\frac{10\pi i}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$$

und sehen dann, dass $\zeta + \zeta^5 = i \notin \mathbb{Q}$. Daraus folgt zudem $(\zeta + \zeta^5)(\zeta + \zeta^{11}) = i\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Damit sind alle Zwischenkörper gefunden.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T2A5)

Betrachte den Körper $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$. Laut Fortsetzungssatz gibt es einen \mathbb{Q} -Homomorphismus $\sigma: \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$. Daraus folgt $\sigma(\mathbb{Q}(\alpha)) \subseteq \mathbb{Q}(\beta)$. Da außerdem α und β das gleiche Minimalpolynom über \mathbb{Q} haben (nämlich f), folgt $\sigma(\mathbb{Q}(\alpha)) = \mathbb{Q}(\beta)$ durch Vergleich der Dimensionen $\dim_{\mathbb{Q}} \sigma(\mathbb{Q}(\alpha)) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha)$ und $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\beta)$. Insbesondere $\sigma(\mathbb{Q}(\alpha)) \not\subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$, denn $\mathbb{Q}(\beta) \not\subseteq \mathbb{R}$ nach Voraussetzung.

Wäre dagegen $G_{L|\mathbb{Q}}$ abelsch, so wäre jede Untergruppe von $G_{L|\mathbb{Q}}$ auch ein Normalteiler. Insbesondere wäre $G_{L|\mathbb{Q}(\alpha)}$ ein Normalteiler von $G_{L|\mathbb{Q}}$, sodass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie normal sein müsste. Es folgt (siehe Definition 3.8 (c)), dass σ sich zu einem Automorphismus von $\mathbb{Q}(\alpha)$ beschränken müsste. Letzteres würde gerade $\sigma(\mathbb{Q}(\alpha)) = \mathbb{Q}(\alpha)$ bedeuten.

Betrachte den Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\alpha)$ von $L|\mathbb{Q}$. Wäre die Galois-Gruppe $G_{L|\mathbb{Q}}$ abelsch, so wäre jede ihrer Untergruppen ein Normalteiler. Damit müsste die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ normal sein. Nun ist f ein irreduzibles Polynom, das in $\mathbb{Q}(\alpha)$ eine Nullstelle besitzt, damit müsste f über $\mathbb{Q}(\alpha)$ in Linearfaktoren zerfallen, was insbesondere $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ impliziert – im Widerspruch zu $\beta \notin \mathbb{R}$.

Lösungen zu Thema Nr. 3

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T3A1)

a Laut den Sylowsätzen haben wir

$$n_2 \mid 31 \Rightarrow n_2 \in \{1, 31\} \quad \text{und} \quad n_{31} \mid 2^5 \Rightarrow n_{31} \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}.$$

Zusätzlich muss $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$ und $n_{31} \equiv 1 \pmod{31}$ gelten, also reduzieren sich die oben angegebenen Möglichkeiten auf

$$n_2 \in \{1, 31\} \quad \text{und} \quad n_{31} \in \{1, 32\}.$$

b Wir zeigen zunächst, dass nicht zugleich $n_2 = 31$ und $n_{31} = 32$ sein kann. Das ist ein klassischer Fall für Elementezahlen: Da 31 eine Primzahl ist, ist jede 31-Sylowgruppe zyklisch und jedes ihrer nicht-trivialen Elemente ist automatisch ein Erzeuger der Sylowgruppe. Daraus folgt, dass sich zwei verschiedene solche 31-Sylowgruppen nur trivial schneiden können: andernfalls würde der Schnitt einen Erzeuger enthalten. Da der Schnitt zweier Untergruppen wiederum eine Untergruppe ist, müsste dann der

Schnitt ebenfalls eine Gruppe der Ordnung 31 sein und die beiden 31-Sylowgruppen wären identisch.

Dies bedeutet, dass die 31-Sylowgruppen insgesamt $n_{31} \cdot 30 = 960$ Elemente der Ordnung 31 enthalten. Wegen $31 \nmid 2^5$ kann keines davon in einer 2-Sylowgruppe enthalten sein. Das liefert 32 weitere Elemente und da wir laut Annahme zwei verschiedene 2-Sylowgruppen haben, mindestens ein weiteres bisher nicht gezähltes Element. Insgesamt erhalten wir so

$$960 + 32 + 1 = 993 > 992 = |G|,$$

was nicht sein kann. Folglich gilt $n_{31} = 1$ oder $n_2 = 1$. Im ersten Fall ist die einzige 31-Sylowgruppe P ein Normalteiler. Die Faktorgruppe G/P hat Ordnung 2^5 . Da p -Gruppen auflösbar sind, sind sowohl P als auch G/P auflösbar. Es folgt dann aus Satz 1.30, dass G selbst ebenfalls auflösbar ist. Den Fall $n_2 = 1$ behandelt man analog.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T3A2)

- a** Da G eine endliche abelsche Gruppe ist, gibt es $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ mit $G \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. Man zeigt nun leicht, dass

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid na = 0 \text{ für alle } a \in G\} = \text{kgV}(n_1, \dots, n_r).$$

Außerdem ist klar, dass die Ordnung eines Elementes in G höchstens gleich $\text{kgV}(n_1, \dots, n_r)$ sein kann, da diese Zahl jedes Element in G annulliert und dass $(1, \dots, 1) \in \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung $\text{kgV}(n_1, \dots, n_r)$ ist. Daraus folgt insgesamt wie behauptet

$$\exp(G) = \text{kgV}(n_1, \dots, n_r) = \max\{\text{ord}(a) \mid a \in G\}.$$

- b** Sei $\frac{r}{s} + \mathbb{Z}$ eine Nebenklasse in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , dann ist die Ordnung von $\frac{r}{s} + \mathbb{Z}$ ein Teiler von s , insbesondere also endlich. Gleichzeitig ist durch

$$\frac{1}{n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein Element der Ordnung n gegeben, sodass der Exponent von \mathbb{Q}/\mathbb{Z} nicht endlich sein kann.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T3A3)

- „**a** \Rightarrow **b**“: Sei $(1 + aX) \in R[X]^\times$, d. h. es gibt ein Polynom $\sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ mit

$(1 + aX) \cdot (\sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k) = 1$. Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot b_0, \\ 0 &= ab_k + b_{k-1} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n-1, \\ 0 &= ab_{n-1}. \end{aligned}$$

Mittels vollständiger Induktion gewinnt man aus den ersten beiden Gleichungen nun $b_k = (-1)^k a^k$ für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Insbesondere besagt also die dritte Gleichung oben, dass $(-1)^{n-1} a^n = 0$. Durch Multiplizieren mit $(-1)^{n-1}$ gewinnen wir daraus dann die gewünschte Gleichung $a^n = 0$.

„**b** \Rightarrow **a**“: Sei umgekehrt $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$. Unter dem Eindruck der Vorarbeit oben definiert man das Polynom $f = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k X^k$ und rechnet nach, dass $f \cdot (1 + aX) = 1$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T3A4)

a Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \alpha^3 = 2 + \sqrt{2} &\Rightarrow \alpha^3 - 2 = \sqrt{2} \Rightarrow (\alpha^3 - 2)^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^6 - 4\alpha^3 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Daher ist α eine Nullstelle des Polynoms $X^6 - 4X^3 + 2$. Da dieses Polynom normiert und nach dem Eisensteinkriterium mit $p = 2$ irreduzibel ist, muss es sich dabei um das Minimalpolynom f von α über \mathbb{Q} handeln.

b Mittels Einsetzen sieht man $f(\beta) = 0$. Wir behaupten zunächst, dass die Nullstellenmenge N von f durch

$$N = \{\zeta^k \alpha \mid 0 \leq k \leq 2\} \cup \{\zeta^k \beta \mid 0 \leq k \leq 2\}$$

gegeben ist. Sei $\gamma \in N$. Dann ist γ^3 eine Nullstelle von $X^2 - 4X + 2$. Mit der Mitternachtsformel folgt

$$\gamma^3 \in \{2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}.$$

Daraus folgt $\gamma = \zeta^k \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}$, wie behauptet. Wir müssen noch nachweisen, dass $\mathbb{Q}(N) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \zeta)$ gilt. Dies ist aber aufgrund obiger expliziter Beschreibung der Menge N klar.

c Es gilt

$$\alpha \cdot \beta = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \sqrt[3]{2} \in L.$$

Folglich ist $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$ ein Zwischenkörper der Erweiterung $L|\mathbb{Q}$. Es genügt nun zu zeigen, dass $M|\mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung von Grad 6 ist. Da M der Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist, ist $M|\mathbb{Q}$ normal. Des Weiteren gilt

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3 \quad \text{und} \quad [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 2,$$

denn die zugehörigen Minimalpolynome über \mathbb{Q} sind $X^3 - 2$ bzw. $X^2 + X + 1$. Da diese Grade teilerfremd sind, folgt

$$[M : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 3 \cdot 2.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2017, T3A5)

Geht genauso wie Aufgabe H03T2A2 (zu finden auf Seite 187).

4 Analysis: Aufgabenlösungen nach Jahrgängen

Prüfungstermin: Frühjahr 2015

Thema Nr. 1 (Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → siehe Buch S. 357 1 + 3 + 2 Punkte

In dieser Aufgabe bezeichne $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Ferner sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) := 6z^6 - 2z^2 + 1$ gegeben.

a Formulieren Sie den Satz von Rouché für ganze Funktionen.

b Zeigen Sie, dass $B_4(1) \subseteq f(B_1(0)) \subseteq B_8(1)$ gilt.

Hinweis Für den Nachweis der ersten Inklusion könnte der in **a** formulierte Satz hilfreich sein.

c Entscheiden Sie mit Beweis, ob $f(B_1(0)) \cap \mathbb{R} = f(B_1(0) \cap \mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 2 → S. 111 6 Punkte

Es sei $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0 \text{ und } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ der offene zweite Quadrant der komplexen Zahlenebene. Bestimmen Sie mit Begründung alle Abbildungen $f: Q \rightarrow \mathbb{C}$, die Q biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ abbilden mit $f(-1 + i) = 0$.

Aufgabe 3 → S. 113 3 + 3 Punkte

a Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \cos(2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für welche $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ist die maximale Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems $x(0) = a, x'(0) = b$ beschränkt? Begründen Sie Ihre Antworten.

- b** Geben Sie (mit Begründung) alle Paare $(c; d) \in \mathbb{R}^2$ an, für welche die zugehörige Differentialgleichung

$$x''(t) + cx'(t) + dx(t) = \cos(2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

keine beschränkte reelle maximale Lösung besitzt.

Aufgabe 4 → siehe Buch S. 395

6 Punkte

Bestimmen Sie eine reelle Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y(x)y'(x) + y(x)^2 + 2x + 5 = 0, \quad y(-4) = -2.$$

Wie groß kann das Intervall I maximal gewählt werden?

Hinweis Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, zunächst einen integrierenden Faktor $u : \mathbb{R} \rightarrow]0; \infty[$ zu bestimmen, welcher nur von der Variablen x abhängt. Wir bezeichnen hierbei u als integrierenden Faktor, wenn die Differentialgleichung nach Multiplikation mit u exakt wird.

Aufgabe 5 → S. 115

6 Punkte

Bestimmen Sie (mit Nachweis) für jedes $a \in \mathbb{R}$ das globale Minimum der Funktion

$$f : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 - ax + y^2, \quad \text{wobei } H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\},$$

falls f ein solches Minimum besitzt. Geben Sie in diesen Fällen alle Stellen an, an denen das Minimum angenommen wird.

Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 116

2 + 2 + 2 Punkte

- a** Definiere $U := \{z \in \mathbb{C} : 2|\operatorname{Re}(z)| + 3|\operatorname{Im}(z)| + \frac{1}{1+|z|^2} < \frac{11}{2}\}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \rightarrow U$ und Punkte $v, w \in \mathbb{C}$ mit $h(v) = \frac{i}{2}$ und $h(w) = 1 - i$? Begründung!
- b** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine nicht-leere offene Menge und $z_0 \in \Omega$. Seien $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = 0, g(z_0) = g^{(1)}(z_0) = 0$ und $g^{(2)}(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(2)}(z_0)}{g^{(2)}(z_0)}.$$

c Definiere $F: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \frac{1 - \cos(z)}{z^2}, \quad z \neq 0.$$

Ist die isolierte Singularität 0 von F hebbar? Begründung!

Aufgabe 2 → S. 118

3 + 3 Punkte

Sei $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

a Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Log}(z+i) - \operatorname{Log}(z-i) = \operatorname{Log}\left(\frac{z+i}{z-i}\right), \quad z \in U,$$

gilt, wobei $\operatorname{Log} : \Omega_- \rightarrow \mathbb{C}$, mit $\Omega_- := \mathbb{C} \setminus \{x+i0 : x \in]-\infty, 0]\}$, der Hauptzweig des Logarithmus ist.

b Für jedes $z \in U$ sei $[1, \frac{z}{2}]$ die gerade Strecke in \mathbb{C} von $1+0i$ nach $\frac{z}{2}$. Definiere $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Wegintegrale

$$f(z) := \int_{[1, \frac{z}{2}]} \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta, \quad z \in U.$$

Zeigen Sie:

$$f(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{z+2i}{z-2i}\right), \quad z \in U.$$

Aufgabe 3 → S. 119

2 + 4 Punkte

a Sei $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ und r eine reelle Zahl mit $r > e$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$rze^z = 1$$

genau eine Lösung in K besitzt.

Hinweis Die Verwendung des Satzes von Rouché könnte hier hilfreich sein.

b Sei γ die positiv orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius 3. Definiere die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Wegintegrale

$$f(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f eine reell-wertige C^∞ -Funktion auf \mathbb{R} mit $f(0) = 0$ ist.

Aufgabe 4 → siehe Buch S. 407

3 + 3 Punkte

Man löse das Anfangswertproblem $x' = x + t, x(0) = -1$ **a** mit der Methode der Variation der Konstanten; (3 Punkte)**b** mittels der Picard-Lindelöf-Iteration $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, beginnend mit $\alpha_0(t) \equiv -1$.**Aufgabe 5** → siehe Buch S. 476

6 Punkte

Gegeben sei das ebene autonome System

$$x' = -e^x - 2y + 1$$

$$y' = 2x - y.$$

Man bestimme alle Ruhepunkte des Systems und untersuche diese auf Stabilität.

Thema Nr. 3 (Aufgabengruppe)

In dieser Aufgabengruppe bezeichne $K_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ die offene Kreisscheibe um 0 mit Radius $r > 0$. Ferner sei $\mathbb{D} := K_1(0)$.**Aufgabe 1** → siehe Buch S. 388

3 + 3 Punkte

Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = g(t)f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

wobei $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.**a** Geben Sie ein Beispiel eines Anfangswertproblems der Form (1) an, sowie ein zugehöriges Intervall, so dass es zwei verschiedene Lösungen besitzt.**b** Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $f, g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass das Problem (1) dann lokal eindeutig lösbar ist. **Hinweis** Es sind hier Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen.**Aufgabe 2** → S. 120

6 Punkte

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 1 \\ 1 & e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Man zeige, dass die eindeutige Lösung von der Form

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e \begin{bmatrix} f(t) & g(t) \\ g(t) & f(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

ist und bestimme die Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 → siehe Buch S. 362

6 Punkte

Es seien f und g holomorph auf $K_2(0)$ und $f(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ und für jedes $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ sei $g(\zeta)/f(\zeta)$ reell und positiv. Zeigen Sie, dass f und g in \mathbb{D} dieselbe Anzahl von Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) besitzen.

Aufgabe 4 → S. 121

4 + 2 Punkte

- a** Es sei f holomorph in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit einem Pol 1. Ordnung in $z = 0$. Weiter seien $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\varepsilon > 0$ und $\gamma_\varepsilon: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ für $t \in [0, \alpha]$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(\zeta) d\zeta = i\alpha \operatorname{res}(0, f).$$

Hier bezeichne $\operatorname{res}(0, f)$ das Residuum von f im Punkt $z = 0$.

- b** Die stetige Funktion $f: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph in \mathbb{D} . Ferner seien m_1 und m_2 reell und positiv, derart, dass für alle $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ gilt

$$|f(\zeta)| \leq m_1 \text{ falls } \operatorname{Im} \zeta \geq 0 \quad \text{und} \quad |f(\zeta)| \leq m_2 \text{ falls } \operatorname{Im} \zeta \leq 0.$$

Beweisen Sie, dass $|f(0)| \leq \sqrt{m_1 m_2}$. **Hinweis** Betrachten Sie die Funktion $f(z)f(-z)$.

Aufgabe 5 → S. 122

3 + 3 Punkte

- a** Zeigen Sie: Es gibt keine holomorphe Funktion $f: \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(z)^3 = z$ für alle $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. **Hinweis** Wenden Sie zunächst den Riemannschen Hebbarkeitssatz an.
- b** Gibt es eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, die den beiden Bedingungen $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt = 1$$

genügt? **Hinweis** Maximumsprinzip für $\frac{1}{f}$ bzw. Minimumsprinzip für f .

Lösungen zu Thema Nr. 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T1A2)

Sei $f: Q \rightarrow \mathbb{E}$ eine biholomorphe Abbildung mit $f(-1+i) = 0$ und $g: Q \rightarrow \mathbb{E}$ eine weitere biholomorphe Abbildung mit $g(-1+i) = 0$. Dann ist

$$g \circ f^{-1}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$$

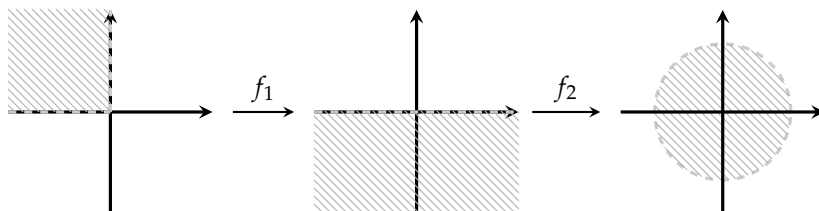
ebenfalls eine biholomorphe Abbildung mit $(g \circ f^{-1})(0) = 0$. Abbildungen dieser Art sind vollständig bekannt, es gibt nämlich ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$, sodass

$$(g \circ f^{-1})(w) = g(f^{-1}(w)) = \zeta w \quad \text{für alle } w \in \mathbb{E}.$$

Aufgrund der Bijektivität von f folgt daraus für $w = f(z)$ die Gleichung $g(z) = \zeta f(z)$ für alle $z \in Q$. Wir bestimmen nun also solch eine Abbildung f , dann ist die Menge aller biholomorphen Abbildungen $g: Q \rightarrow \mathbb{E}$ mit $g(-1+i) = 0$ gegeben durch

$$\{g: Q \rightarrow \mathbb{E} \mid \exists \zeta \in \partial\mathbb{E} : \forall z \in Q : g(z) = \zeta f(z)\}.$$

Zur Konstruktion der Abbildung f gehen wir in mehreren Schritten vor, wie die folgende Abbildung veranschaulicht.



Um zunächst den zweiten Quadranten auf die untere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z < 0\}$ abzubilden, bemerken wir, dass für $z = x + iy \in Q$ gilt, dass

$$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Wegen $x < 0$ und $y > 0$ ist somit $\text{Im } z^2 = 2xy < 0$ und z^2 liegt in \mathbb{H} . Wir zeigen nun, dass

$$f_1: Q \rightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto z^2$$

eine biholomorphe Abbildung ist. Die Holomorphie ist als Polynomfunktion klar. Für die *Injektivität* betrachte $z_1, z_2 \in Q$ mit $g_1(z_1) = g_1(z_2)$. Es folgt

$$z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow z_1^2 - z_2^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = 0$$

Nehmen wir an, es wäre $z_1 + z_2 = 0$, also $z_1 = -z_2$. Wegen $z_1 \in Q$ würde aber folgen $\operatorname{Re} z_2 = -\operatorname{Re} z_1 > 0$, also $z_2 \notin Q$ – Widerspruch. Also muss $z_1 = z_2$ gelten.

Für die *Surjektivität* sei $w \in \mathbb{H}$ vorgegeben. Schreibe $w = re^{i\varphi}$ mit $r = |w|$ und $\varphi \in]\pi; 2\pi[$. Dann gilt wegen $\cos x < 0$ und $\sin x > 0$ für $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

$$\operatorname{Re} \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{r} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) < 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{r} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) > 0$$

sowie $(\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}})^2 = re^{i\varphi} = w$. Also ist $\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ ein Urbild von w in Q .

Im nächsten Schritt bilden wir nun \mathbb{H} auf \mathbb{E} ab. Dafür bestimmt man beispielsweise aus den Punkten

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 1, \quad w_1 = -1, \quad w_2 = i, \quad w_3 = 1$$

mithilfe des Doppelverhältnisses die Möbiustransformation

$$f_2: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, \quad z \mapsto \frac{z+i}{iz+1}.$$

Als Komposition ergibt sich dann

$$f_2 \circ f_1(z) = \frac{z^2+i}{iz^2+1}.$$

Wegen $(f_2 \circ f_1)(-1+i) = \frac{-i}{3}$ brauchen wir noch eine weitere Abbildung $f_3: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f_3(\frac{-i}{3}) = 0$. Dazu nimmt man beispielsweise

$$f_3: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \quad z \mapsto \frac{3z+i}{iz-3}.$$

Um $f_3 \circ f_2$ zu bestimmen, verwenden wir Matrizenkalkül: Wegen

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ i & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4i \\ -2i & -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -i & -2 \end{pmatrix}$$

ist $(f_3 \circ f_2)(z) = \frac{z+2i}{-iz-2}$. Insgesamt erhalten wir daher

$$f(z) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = \frac{z^2+2i}{-iz^2-2}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T1A3)

a Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung ist

$$p = X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2.$$

Dieses hat eine doppelte Nullstelle -1 , also ist nach Satz 7.19 durch

$$\{e^{-t}, te^{-t}\}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung gegeben. Um eine partikuläre Lösung λ_p des inhomogenen Systems zu finden, machen wir den Ansatz (vgl. die Tabelle auf Seite 451)

$$\lambda_p(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \cos 2t &\stackrel{!}{=} \lambda_p''(t) + 2\lambda_p'(t) + \lambda_p(t) = \\ &= -4c_1 \cos 2t - 4c_2 \sin 2t + 2(-2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t) \\ &\quad + (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) = \\ &= (-3c_1 + 4c_2) \cos 2t + (-3c_2 - 4c_1) \sin 2t. \end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich liest man daraus die Gleichungen

$$1 = -3c_1 + 4c_2 \quad \text{und} \quad 0 = -4c_1 - 3c_2$$

ab. Die zweite Gleichung liefert $c_1 = -\frac{3}{4}c_2$ und eingesetzt in die erste ergibt das

$$1 = \frac{9}{4}c_2 + 4c_2 = \frac{25}{4}c_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{4}{25}.$$

Daraus folgt dann $c_1 = -\frac{3}{25}$ und man erhält

$$\lambda_p(t) = -\frac{3}{25} \cos 2t + \frac{4}{25} \sin 2t.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung hat dann die Form

$$\lambda(t) = c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} - \frac{3}{25} \cos 2t + \frac{4}{25} \sin 2t$$

mit gewissen Koeffizienten $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Damit λ beschränkt bleibt, muss $c_3 = c_4 = 0$ sein, d. h.

$$a = \lambda(0) = -\frac{3}{25} \quad \text{und} \quad b = \lambda'(0) = \frac{8}{25}.$$

b Damit alle reellen Lösungen unbeschränkt sind, muss die partikuläre Lösung der Gleichung unbeschränkt sein. Aufgrund der Tabelle auf Seite 451 vermuten wir, dass dies nur dann der Fall ist, wenn Resonanz vorliegt. Dazu müsste in diesem Fall $2i$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Gleichung sein. Die entsprechende Gleichung lautet

$$(2i)^2 + 2ic + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4 + 2ic + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0 \text{ und } d = 4.$$

Behauptung: Die Gleichung hat genau dann keine beschränkte reelle Lösung, wenn $c = 0$ und $d = 4$ gilt.

Im Fall $c = 0$ und $d = 4$ hat das charakteristische Polynom die Eigenwerte $\pm 2i$, als Ansatz für eine partikuläre Lösung wählt man somit

$$\lambda_p(t) = tc_1 \cos(2t) + tc_2 \sin(2t).$$

Eine weitgehend analoge Rechnung zu oben liefert dann $\lambda_p(t) = \frac{1}{4}t \sin(2t)$. Damit ist die allgemeine Lösung der Gleichung gegeben durch

$$a \cos 2t + b \sin 2t + \frac{1}{4}t \sin 2t \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}.$$

Da der letzte Summand unbeschränkt ist, sind somit für $a, b \in \mathbb{R}$ alle Lösungen unbeschränkt.

Betrachten wir nun den Fall, dass $c \neq 0$ und $d \neq 4$ ist. Wir zeigen, dass es dann eine partikuläre Lösung in derselben Form wie in Teil **a** gibt. Der Ansatz $\lambda_p(t) = a_1 \cos(2t) + a_2 \sin(2t)$ liefert durch Einsetzen in die Gleichung analog zu vorher

$$\cos 2t = (da_1 + 2ca_2 - 4a_1) \cos(2t) + (da_2 - 2ca_1 - 4a_2) \sin(2t).$$

Daraus bekommt man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= (d - 4)a_1 + 2c a_2 \\ 0 &= -2c a_1 + (d - 4)a_2. \end{aligned}$$

Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist nun gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} d - 4 & 2c \\ -2c & d - 4 \end{pmatrix} = (d - 4)^2 + 4c^2.$$

Wegen $d \neq 4$ oder $c \neq 0$ ist diese positiv, also ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und wir erhalten eine partikuläre Lösung, die beschränkt ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T1A5)

1. *Schritt: kritische Punkte und isolierte Minima:* Wir bestimmen zunächst den Gradienten von f :

$$(\nabla f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - a \\ 2y \end{pmatrix}$$

Die kritischen Punkte sind genau diejenigen Punkte, an denen $(\nabla f)(x, y)$ verschwindet, d. h. die Lösungen der Gleichungen

$$2x - a = 0 \quad \text{und} \quad 2y = 0.$$

Auflösen ergibt den kritischen Punkt $(\frac{a}{2}, 0)$. Wegen

$$\frac{a}{2} + 0 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 2$$

ist dieser nur im Fall $a \geq 2$ in H enthalten. Tatsächlich ist in diesem Fall $f(\frac{a}{2}, 0)$ ein globales Minimum, denn es gilt für $(x, y) \in H$

$$f(x, y) = x^2 - ax + y^2 = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + y^2 \geq -\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 0 = f\left(\frac{a}{2}, 0\right).$$

2. *Schritt: Randextrema:* Für $a < 2$ liegt P nicht in H . In diesem Fall könnte es stattdessen ein Minimum auf dem Rand geben. Wir betrachten daher f eingeschränkt auf den Rand

$$\partial H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}.$$

Für einen Randpunkt $(x, y) \in \partial H$ ist $y = 1 - x$, d. h. dort ist

$$f|_{\partial H}(x, y) = g(x) = x^2 - ax + (1 - x)^2 = 2x^2 - (a + 2)x + 1.$$

Wo (und ob) diese Funktion ein Extremum besitzt, sehen wir an der ersten Ableitung:

$$g'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x_0 - (a + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{1}{4}(a + 2).$$

Der zugehörige y -Wert ist dann $y_0 = 1 - \frac{1}{4}(a + 2) = \frac{2-a}{4}$. Der Funktionswert

berechnet sich zu

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= \left(\frac{a+2}{4}\right)^2 - a \left(\frac{a+2}{4}\right) + \left(\frac{2-a}{4}\right)^2 = \\ &= \frac{(a+2)^2}{16} - \frac{4a(a+2)}{16} + \frac{(2-a)^2}{16} = \frac{-2a^2 - 8a + 8}{16} = \\ &= -\frac{a^2 + 4a - 4}{8} = -\frac{a^2 + 4a + 4}{8} + \frac{8}{8} = -\frac{1}{8}(a+2)^2 + 1. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun quadratische Ergänzung, um $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ für beliebiges $(x, y) \in H$ zu zeigen. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - ax + y^2 = \\ &= \left(x - \frac{a+2}{4}\right)^2 + \frac{a+2}{2}x - \frac{(a+2)^2}{16} - ax + \left(y - \frac{2-a}{4}\right)^2 + \frac{2-a}{2}y - \left(\frac{2-a}{4}\right)^2 \\ &\geq \frac{a+2}{2}x - \frac{(a+2)^2}{16} - ax + \frac{2-a}{2}y - \left(\frac{2-a}{4}\right)^2 = \\ &= \frac{2-a}{2}x + \frac{2-a}{2}y - \frac{a^2+4a+4}{16} - \frac{a^2-4a+4}{16} = \\ &= \frac{2-a}{2}(x+y) - \frac{2a^2+8}{16}. \end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass $x+y \geq 1$ ist und wegen $a < 2$ ist $\frac{2-a}{2}$ positiv, sodass wir daraus $\frac{2-a}{2}(x+y) \geq \frac{2-a}{2}$ schlussfolgern können. Damit erhalten wir die Abschätzung

$$f(x, y) \geq \frac{2-a}{2} - \frac{2a^2+8}{16} = 1 - \frac{4a}{8} - \frac{a^2+4}{8} = 1 - \frac{1}{8}(a+2)^2 = f(x_0, y_0).$$

Tatsächlich ist also $f(x_0, y_0) = -\frac{1}{8}(a+2)^2 + 1$ ein globales Minimum von f . Die obige Abschätzung ist für $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ sogar strikt, sodass (x_0, y_0) die einzige Stelle ist, an der das Minimum angenommen wird.

Lösungen zu Thema Nr. 2

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T2A1)

a Angenommen, es gibt eine solche Funktion h . Es gilt $3,4 \notin U$, denn

$$2 \cdot 4 + \frac{1}{1+4^2} > 2 \cdot 3 + \frac{1}{1+3^2} > 6 = \frac{12}{2} > \frac{11}{2}.$$

Laut Angabe ist $h(\mathbb{C}) \subseteq U$, also insbesondere $3,4 \notin h(\mathbb{C})$. Nach dem Kleinen Satz von Picard muss daher h bereits konstant sein, also kann

nicht $h(v) = \frac{i}{2} \neq 1 - i = h(w)$ gelten.

b Da f und g auf Ω holomorph sind, können wir beide Funktionen in Potenzreihen um $z_0 \in \Omega$ entwickeln:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

Für die Koeffizienten gilt $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$ bzw. $b_k = \frac{1}{k!} g^{(k)}(z_0)$, sodass aus der Angabe

$$\begin{aligned} a_0 = f(z_0) = 0, \quad a_1 = f'(z_0) = 0, \\ b_0 = g(z_0) = 0, \quad b_1 = g'(z_0) = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2} g^{(2)}(z_0) \neq 0 \end{aligned}$$

folgt. Somit können wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k \\ \text{und} \quad g(z) &= (z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} (z - z_0)^k \end{aligned}$$

schreiben. Nun ist also

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k}{(z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} (z - z_0)^k} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (z - z_0)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} (z - z_0)^k} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{\frac{1}{2} f^{(2)}(z_0)}{\frac{1}{2} g^{(2)}(z_0)} = \frac{f^{(2)}(z_0)}{g^{(2)}(z_0)}. \end{aligned}$$

c Unter Verwendung der Kosinusreihe ist

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z^2} \cdot (1 - \cos z) = \frac{1}{z^2} \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right) = \\ &= -\frac{1}{z^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k-2}}{(2k)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2(k+1))!} \end{aligned}$$

An dieser Laurentreihenentwicklung sieht man, dass der Hauptteil verschwindet und es sich folglich bei 0 um eine hebbare Singularität handelt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T2A2)

- a** Der Hauptzweig des Logarithmus ist definiert als $\text{Log}(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$. Sei nun $x \in]0, \infty[$. Es ist dann $x + i = \sqrt{1 + x^2}e^{i\varphi}$ und $x - i = \sqrt{1 + x^2}e^{-i\varphi}$ mit $\varphi = \arctan \frac{1}{x}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \text{Log}(x + i) - \text{Log}(x - i) &= \ln \sqrt{1 + x^2} + i\varphi - (\ln \sqrt{1 + x^2} - i\varphi) = 2i\varphi = \\ &= \text{Log} e^{2i\varphi} = \text{Log} \frac{\sqrt{1 + x^2}e^{i\varphi}}{\sqrt{1 + x^2}e^{-i\varphi}} = \text{Log} \frac{x + i}{x - i}. \end{aligned}$$

Somit gilt die Gleichheit zumindest auf der positiven reellen Achse. Da es sich bei $]0, \infty[$ um eine nicht-diskrete Menge handelt, folgt die Aussage aus dem Identitätssatz.

- b** Man zeigt zunächst, dass die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1 + \zeta^2} = \frac{i/2}{\zeta + i} - \frac{i/2}{\zeta - i}$$

wahr ist. Damit berechnet man nun

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{i}{2} \int_{[1, \frac{z}{2}]} \frac{1}{\zeta + i} d\zeta - \frac{i}{2} \int_{[1, \frac{z}{2}]} \frac{1}{\zeta - i} d\zeta = \\ &= \frac{i}{2} [\text{Log}(\zeta + i)]_1^{z/2} - \frac{i}{2} [\text{Log}(\zeta - i)]_1^{z/2} = \\ &= \frac{i}{2} \left(\text{Log}\left(\frac{z}{2} + i\right) - \text{Log}\left(\frac{z}{2} - i\right) - \text{Log}(1 + i) + \text{Log}(1 - i) \right) = \\ &\stackrel{\mathbf{a}}{=} \frac{i}{2} \text{Log} \left(\frac{z + 2i}{z - 2i} \right) - \frac{i}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right) \end{aligned}$$

Den zweiten Summanden berechnen wir getrennt:

$$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

Es ist $i = e^{i\pi/2}$ und somit $\text{Log}(i) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$. Also ist insgesamt

$$f(z) = \frac{i}{2} \text{Log} \left(\frac{z + 2i}{z - 2i} \right) - \frac{i}{2} \cdot i\frac{\pi}{2} = \frac{i}{2} \text{Log} \left(\frac{z + 2i}{z - 2i} \right) + \frac{\pi}{4}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T2A3)

a Für alle $z \in \partial K$ gilt $|z| = 1$ und damit die Abschätzung

$$|rze^z| = r \cdot |e^z| = r \cdot e^{\operatorname{Re}z}.$$

Aus $|z| = 1$ folgt insbesondere $|\operatorname{Re}(z)| \leq 1$, d. h. $-1 \leq \operatorname{Re}z \leq 1$. Also gilt weiter

$$r \cdot e^{\operatorname{Re}z} \geq r \cdot e^{-1} > e \cdot e^{-1} = 1 = |-1|.$$

Aus dem Satz von Rouché 6.36 folgt nun, dass rze^z und $rze^z - 1$ gleich viele Nullstellen in K haben. Wegen

$$|rze^z| = 0 \Leftrightarrow r|z| \cdot e^{\operatorname{Re}(z)} = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

ist dies genau eine Nullstelle. Daher gibt es genau ein $z \in K$ mit

$$rze^z - 1 = 0 \Leftrightarrow rze^z = 1.$$

b Es gilt

$$z^2 + 2z + 2 = (z + 1)^2 + 1 = (z + 1)^2 - i^2 = (z + 1 + i)(z + 1 - i).$$

Definiere nun für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$g_t: \mathbb{C} \setminus \{0, -1 + i, -1 - i\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{e^{zt}}{z^2(z + 1 - i)(z + 1 + i)}.$$

Wir wollen im Folgenden (natürlich) den Residuensatz anwenden, weswegen wir zunächst die Residuen von f berechnen. Wegen

$$\lim_{z \rightarrow 0} |g_t(z)| = \lim_{z \rightarrow 0} |zg_t(z)| = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow 0} z^2 g_t(z) = \frac{1}{2} \neq \infty$$

hat g_t bei 0 ein Pol zweiter Ordnung. Daher ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g_t; 0) &= \left(\frac{d}{dz} z^2 g_t(z) \right) \Big|_{z=0} = \left(\frac{te^{zt}(z^2 + 2z + 2) - (2z + 2)e^{zt}}{(z^2 + 2z + 2)^2} \right) \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{2t - 2}{4} = \frac{t - 1}{2}. \end{aligned}$$

Genauso sieht man anhand von

$$\lim_{z \rightarrow -1-i} |g_t(z)| = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow -1-i} (z + 1 + i)g_t(z) = \frac{e^{t(-1-i)}}{(-1-i)^2(-2i)} = \frac{1}{4}e^{-t-it}$$

sowie

$$\lim_{z \rightarrow -1+i} |g_t(z)| = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow -1+i} (z+1-i)g_t(z) = \frac{e^{t(-1+i)}}{(-1+i)^2 \cdot 2i} = \frac{1}{4}e^{-t+it},$$

dass die beiden anderen Singularitäten Pole erster Ordnung mit $\text{Res}(g_t; -1-i) = \frac{1}{4}e^{-t-it}$ und $\text{Res}(g_t; -1+i) = \frac{1}{4}e^{-t+it}$ sind.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g_t(z) dz = \\ &= \text{Res}(g_t; 0) + \text{Res}(g_t; -1-i) + \text{Res}(g_t; -1+i) = \\ &= \frac{t-1}{2} + \frac{1}{4}e^{-t-it} + \frac{1}{4}e^{-t+it} = \frac{t-1}{2} + \frac{1}{4}e^{-t} (e^{-it} + e^{it}) = \\ &= \frac{t-1}{2} + \frac{1}{4}e^{-t} \cdot 2 \cos t = \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} \cdot \cos t. \end{aligned}$$

Dabei folgt die vorletzte Gleichung mithilfe der Euler-Identität aus

$$e^{it} + e^{-it} = \cos t + i \sin t + \cos(-t) + i \sin(-t) = 2 \cos t.$$

An der obigen Darstellung erkennt man direkt, dass f eine reellwertige \mathcal{C}^∞ -Funktion ist. Zudem ist

$$f(0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^0 \cos 0 = 0.$$

Lösungen zu Thema Nr. 3

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T3A2)

Sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ 1 & e^t \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun, falls $M: I \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ eine matrixwertige Funktion mit $M(t) \cdot M'(t) = M'(t) \cdot M(t)$ ist, dass dann $\frac{d}{dt} e^{M(t)} = M'(t) \cdot e^{M(t)}$ gilt (Kettenregel für Matrizen). Setze $M(t) = \int_0^t A(s) ds$, dann überprüft man $M(t) \cdot A(t) = A(t) \cdot M(t)$. Es gilt also

$$\frac{d}{dt} e^{M(t)} = M'(t) e^{M(t)} = A(t) e^{M(t)}.$$

Somit liefern beide Spalten von $e^{M(t)}$ Lösungen der angegebenen Differential-

gleichung. Diese sind außerdem linear unabhängig, denn $e^{M(t)}$ ist invertierbar (die Inverse ist $e^{-M(t)}$), sodass $\det e^{M(t)} \neq 0$. Also ist $e^{M(t)}$ eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung und jede Lösung des Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$e^{M(t)} \left(e^{M(0)} \right)^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = e^{M(t)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = e^{M(t)} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ g(t) & f(t) \end{pmatrix} = M(t) = \begin{pmatrix} e^t - 1 & t \\ t & e^t - 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T3A4)

a Sei $f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k$ eine auf $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ gültige Laurentreihenentwicklung von f um 0. Der Nebenteil $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ definiert dann eine ganze Funktion. Da \mathbb{C} einfach zusammenhängend ist, besitzt h eine Stammfunktion $H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und wir haben

$$\int_{\gamma_\varepsilon} h(\zeta) d\zeta = H(\gamma_\varepsilon(\alpha)) - H(\gamma_\varepsilon(0)) = H(\varepsilon e^{i\alpha}) - H(\varepsilon).$$

Da H als holomorphe Funktion stetig ist, ist weiter

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(\varepsilon e^{i\alpha}) - H(\varepsilon) = H(0) - H(0) = 0,$$

also verschwindet das Integral über h . Für den Hauptteil berechnen wir

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{\zeta} d\zeta = \int_0^\alpha \frac{a_{-1} i \varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = \int_0^\alpha i a_{-1} dt = i a_{-1} \alpha = i \alpha \operatorname{Res}(0; f).$$

Zusammen ergibt dies

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(\zeta) d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{\zeta} + h(\zeta) d\zeta = i \alpha \operatorname{Res}(0; f).$$

b Sei $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Ist $\operatorname{Im} \zeta \geq 0$, so ist $\operatorname{Im} -\zeta \leq 0$, sodass $|f(\zeta)| \leq m_1$ und $|f(-\zeta)| \leq m_2$ ist. Im Fall $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$ folgt analog $|f(\zeta)| \leq m_2$ und $|f(-\zeta)| \leq m_1$. In beiden Fällen gilt damit

$$|f(\zeta)f(-\zeta)| \leq m_1 m_2.$$

Da $f(z)f(-z)$ auf \mathbb{D} holomorph und auf $\overline{\mathbb{D}}$ stetig ist, nimmt sie nach dem Maximumsprinzip für beschränkte Mengen auf $\partial\mathbb{D}$ ein Betragsmaximum an. Also gilt für alle $z \in \mathbb{D}$ die Abschätzung

$$|f(z)f(-z)| \leq m_1 m_2.$$

Insbesondere also $|f(0)|^2 = |f(0)f(0)| \leq m_1 m_2$ und somit $|f(0)| \leq \sqrt{m_1 m_2}$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2015, T3A5)

a Für alle $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ gilt laut Angabe

$$|f(z)|^3 = |z| < 1 \quad \Rightarrow \quad |f(z)| = |z|^{1/3} < 1 \quad (\in \mathbb{R}),$$

somit ist 0 nach dem Riemannsches Hebbarkeitssatz eine hebbare Singularität von f . Sei $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Fortsetzung von f , dann folgt aus der Stetigkeit von $z \mapsto z^3$, dass

$$g(0)^3 = \lim_{z \rightarrow 0} g(z)^3 = \lim_{z \rightarrow 0} f(z)^3 = \left(\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \right)^3 = \left(\lim_{z \rightarrow 0} z \right)^3 = 0,$$

also $g(0) = 0$. Holomorphe Funktionen sind unendlich oft stetig differenzierbar. Aus der Kettenregel erhält man daher

$$\frac{d}{dz} g^3(z) = 3g(z)^2 \cdot g'(z)$$

und damit $\left(\frac{d}{dz} g^3 \right) (0) = 3g(0)^2 g'(0) = 0$. Andererseits muss aufgrund der Stetigkeit auch

$$\left(\frac{d}{dz} g^3 \right) (0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} g^3(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} f^3(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z = \lim_{z \rightarrow 0} 1 = 1$$

sein. Widerspruch.

b Nach dem Minimumsprinzip für beschränkte Gebiete hat f eine Nullstelle in \mathbb{D} oder $f|_{\overline{\mathbb{D}}}$ nimmt auf $\partial\mathbb{D}$ ein Betragsminimum an. Da nach Voraussetzung $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, muss es also $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ geben, sodass

$$|f(z)| \geq |f(\zeta)| = 2 \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{D}}$$

gilt. Das Maximumsprinzip für beschränkte Gebiet besagt, dass $f|_{\overline{\mathbb{D}}}$ auf $\partial\mathbb{D}$ auch sein Betragsmaximum annimmt, d. h. es gibt $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, sodass

$$|f(z)| \leq |f(\zeta)| = 2 \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Beide Abschätzungen zusammen ergeben $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Insbesondere hat $|f(z)|$ ein Minimum in 0. Aus dem Minimumsprinzip erhält man nun, dass f konstant auf \mathbb{D} (und damit nach Identitätssatz auf ganz \mathbb{C}) sein muss. Es folgt

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} f(0) \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2\pi} f(0) \cdot 2\pi = f(0).$$

Allerdings ist $|f(0)| = 2 \neq 1$. Widerspruch, also kann es eine solche Funktion f nicht geben.

Prüfungstermin: Herbst 2015

Thema Nr. 1 (Aufabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 130

6 Punkte

Es sei \mathbb{D} die offene komplexe Einheitskreisscheibe. Darüber hinaus seien f und g auf einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorphe Funktionen, die keine Nullstelle in \mathbb{D} besitzen. Zeigen Sie: Gilt $|f| = |g|$ auf $\partial\mathbb{D}$, so gibt es eine Konstante c mit $|c| = 1$, so dass $f = cg$ auf $\overline{\mathbb{D}}$.

Hinweis Man nehme zunächst an, dass auch auf $\partial\mathbb{D}$ keine Nullstellen von g liegen.

Aufgabe 2 → S. 131

3 + 3 Punkte

- a** Existiert eine Folge von Punkten in der offenen oberen komplexen Halbebene, die alle Punkte von \mathbb{R} und keine anderen Häufungswerte hat? Geben Sie eine ausführlich begründete Antwort.
- b** Zeigen Sie, dass es eine Folge von Punkten in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe gibt, die genau die Punkte der (komplexen) Einheitskreislinie als Häufungswerte hat, und weisen Sie nach, dass diese Eigenschaften tatsächlich erfüllt sind.

Aufgabe 3 → S. 132

2 + 4 Punkte

Beweisen Sie, dass jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten vom Grad $n \geq 1$, $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$, genau n Nullstellen in \mathbb{C} besitzt (mit Vielfachheit gezählt) mithilfe

- a** des Satzes von Rouché,
- b** des Null- und Polstellen zählenden Integrals, indem Sie den Quotienten

$$\frac{p'(z)}{p(z)} =: \frac{n}{z}(1 + g(z))$$

betrachten und die so definierte Funktion g geeignet abschätzen.

Aufgabe 4 → siehe Buch S. 433

2 + 2 + 2 Punkte

Es sei $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine stetige, matrixwertige Funktion. Betrachten Sie die zugehörige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (1)$$

- a** Es seien $x_1(t), \dots, x_n(t), t \in \mathbb{R}$, Lösungen von (1). Ferner seien für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ im \mathbb{R}^n linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann für alle $t_1 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)$ im \mathbb{R}^n linear unabhängig sind.
Hinweis Benutzen Sie das Superpositionsprinzip für lineare homogene Differentialgleichungen oder benutzen Sie die Differentialgleichung für Wronski-Determinanten.
- b** Erklären Sie die Begriffe Fundamentalmatrix und Übergangsmatrix (auch Transitionsmatrix oder Hauptfundamentalmatrix genannt). Wie erhält man aus Teil **a** eine Fundamentalmatrix und wie lässt sich die Lösung von **a** mit Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$, mithilfe der Übergangsmatrix ausdrücken?
- c** Zeigen Sie: Sind $\Phi_1(t), \Phi_2(t), t \in \mathbb{R}$, Fundamentalmatrizen, so existiert eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t)C, t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5 → S. 133

2 + 2 + Punkte

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2c\dot{y}(t) + y(t) = 0 \quad (2)$$

mit einer Konstanten $c > 0$.

- a** Zeigen Sie, dass in allen drei Fällen $c^2 - 1 > 0, c^2 - 1 = 0$ und $c^2 - 1 < 0$ die Differentialgleichung asymptotisch stabil ist.
- b** Sei $y(t)$ Lösung von (2) zum Anfangswert $(y(t_0), \dot{y}(t_0)) = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2, t_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.
- c** Bestimmen Sie im Fall $c^2 - 1 < 0$ die Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0.$$

Hierbei ist die Abkürzung $a := \sqrt{1 - c^2}$ nützlich.

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Aufgabe 1 → siehe Buch S. 257 1 + 2 + 1 + 2 Punkte

Wir betrachten die Funktion

$$f: D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \leq 0, y < 0\} \cup \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x, y) := (y + 1)e^x - e^y$$

- a** Geben Sie an, welche Punkte in \mathbb{R}^2 innere Punkte oder Randpunkte von D sind. Ist D offen oder abgeschlossen? Begründen Sie Ihrer Antwort.
- b** Bestimmen Sie Gradienten und Hesse-Matrix von f in allen inneren Punkte von D .
- c** Welcher Punkt im Inneren von D ist eine lokale Extremstelle und von welchem Typ ist er? Begründen Sie Ihre Antwort.
- d** Welcher Randpunkt ist eine lokale Extremstelle von f ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 → siehe Buch S. 453 2 + 2 + 2 Punkte

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + y' = e^{2x}.$$

- a** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.
- b** Bestimmen Sie mit einem geeigneten Ansatz eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und geben Sie damit die allgemeine Lösung an.
- c** Bestimmen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Aufgabe 3 → siehe Buch S. 408 4 + 1 + 1 Punkte

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1. \tag{3}$$

- a** Wir betrachten die Picard-Iteration mit der Startfunktion $y_0(x) = 1$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die n -te Iterierte die Gestalt

$$y_n(x) = 1 + x + \dots + x^n + x^{n+1}r_n(x)$$

besitzt, wobei r_n ein Polynom ist. Finden Sie damit eine Potenzreihe, die (3) löst.

- b** In welchem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?
- c** Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems (3). Auf welchem Intervall ist sie definiert?

Aufgabe 4 → S. 135

3 + 3 Punkte

- a** Zeigen Sie, dass es keine biholomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ gibt.
- b** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein nicht-leeres Gebiet. Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f: \Omega \rightarrow \Omega$, die der Gleichung $f \circ f = f$ genügen.

Aufgabe 5 → S. 136

1 + 2 + 1 + 2 Punkte

Auf dem Gebiet

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \pi\}$$

betrachten wir die meromorphe Funktion

$$f(z) := \frac{1}{\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos z}.$$

- a** Bestimmen Sie alle Singularitäten von f in Ω und geben Sie jeweils den Typ an.
- b** Berechnen Sie die Residuen von f in allen Polstellen.
- c** Hat die Funktion f eine Stammfunktion?
- d** Bestimmen Sie $c \in \mathbb{C}$, so dass die Funktion $f(z) + c \frac{1}{z - \frac{\pi}{2}}$ auf Ω eine Stammfunktion besitzt.

Begründen Sie jeweils alle Antworten auf die Teilaufgaben.

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 137

6 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -1 + i\} \rightarrow \mathbb{C} \quad f(z) = \frac{z}{(z^2 + z)(z + 1 - i)^2}.$$

$\gamma(r)$ bezeichne den Weg entlang der Kreislinie mit Mittelpunkt 0 und Radius $r > 0$ mit einem Umlauf in positiver Richtung. Bestimmen Sie für alle Werte $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1, \sqrt{2}\}$ den Wert des Integrales

$$W(r) := \int_{\gamma(r)} f(z) \, dz.$$

Aufgabe 2 → S. 138

2 + 4 Punkte

- a** Geben Sie die Definitionen für die Begriffe "isolierte Singularität", "hebbare Singularität", "Polstelle" sowie "wesentliche Singularität" an.
- b** Bestimmen Sie Lage und Art aller isolierten Singularitäten der Funktion $h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$h(z) = \frac{z}{z-2} \exp\left(\sin\left(\frac{z-1}{z^2-z}\right)\right),$$

wobei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ den maximal möglichen Definitionsbereich der Funktion bezeichnet.

Achten Sie jeweils bei Ihrer Entscheidung über die Art der Singularitäten auf eine ausführliche Begründung!

Aufgabe 3 → S. 140

1 + 2 + 3 Punkte

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f' = f(f-1)(f+1)$$

für eine reellwertige Funktion f in einer reellen Veränderlichen.

- a** Zeigen Sie unter Nennung geeigneter Sätze, dass diese Differentialgleichung für jedes $f_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung f mit $f(0) = f_0$ besitzt.
- b** Sei nun $f_0 < 1$. Zeigen Sie, dass für keine reelle Zahl a mit $a > 1$ ein t im Definitionsbereich von f existiert, so dass $f(t) = a$ gilt.

- c** Sei $f_0 > 1$. Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl a mit $a > 1$ ein t im Definitionsbereich von f mit $f(t) = a$ existiert.

Aufgabe 4 → S. 142

3 + 2 + 1 Punkte

- a** Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Für ein $M \in \mathbb{R}^+$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte:

$$|f(z)| \leq M|z|^\alpha \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie: $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > \alpha$, hierbei bezeichne $f^{(n)}$ die n -te Ableitung von f , $f^{(0)} = f$.

- b** Es sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $p^{(n)}(0) = 0$ für alle $n > n_0$. Zeigen Sie: p ist ein Polynom vom Grad n_0 .

- c** f erfülle die Voraussetzungen von Aufgabenteil **a**. Zeigen Sie: f ist entweder konstant oder hat mindestens eine Nullstelle.

Aufgabe 5 → siehe Buch S. 262

6 Punkte

Gegeben sei der Ellipsenrand $E \subset \mathbb{R}^2$ durch $(x, y) \in E \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 2$ sowie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = x^3 - 3y^4$.

Begründen Sie, warum f sein Maximum und Minimum auf E annimmt. Bestimmen Sie sodann den maximalen sowie den minimalen Wert, den $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $(x, y) \in E$ annimmt und diejenigen Stellen, an denen das globale Maximum und das globale Minimum angenommen wird.

Lösungen zu Thema Nr. 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T1A1)

Wir nehmen zunächst an, dass g keine Nullstellen auf $\partial\mathbb{D}$ hat. Dies bedeutet auch, dass f keine Nullstellen auf $\partial\mathbb{D}$ hat. Somit ist auch

$$\frac{f}{g}: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$$

eine wohldefinierte, holomorphe Funktion, die auf $\overline{\mathbb{D}}$ keine Nullstellen hat. Diese nimmt nach dem Minimums- bzw. Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete daher ihr Betragsminimum bzw. -maximum auf $\partial\mathbb{D}$ an. Laut Angabe ist

$$|f(z)| = |g(z)| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = 1 \quad \text{für alle } z \in \partial\mathbb{D},$$

also fallen Minimum und Maximum von $\frac{f}{g}$ zusammen, sodass $|\frac{f}{g}|$ bereits konstant auf $\overline{\mathbb{D}}$ sein muss. Insbesondere ist $0 \in \mathbb{D}$ ein lokales Maximum, sodass laut dem Maximumsprinzip auch $\frac{f}{g}$ konstant ist. Also gibt es $c \in \mathbb{C}$, sodass

$$\frac{f(z)}{g(z)} = c \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = cg(z) \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{D}}$$

gilt. Zudem gilt $1 = \left| \frac{f(1)}{g(1)} \right| = |c|$.

Betrachten wir nun den Fall, dass g eine Nullstelle ζ auf $\partial\mathbb{D}$ besitzt. Es ist dann auch $|f(\zeta)| = |g(\zeta)| = 0$, sodass $f(\zeta) = 0$. Weil f und g keine Nullstellen in \mathbb{D} haben, sind sie nicht die Nullfunktion, sodass ζ eine Nullstelle von endlicher Ordnung ist. Also gibt es holomorphe Funktionen $f_1, g_1: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = (z - \zeta)^n f_1(z) \quad \text{und} \quad g(z) = (z - \zeta)^m g_1(z)$$

für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$ und $f_1(\zeta) \neq 0 \neq g_1(\zeta)$. Sei o. B. d. A. $n \leq m$. Für $z \in \partial\mathbb{D} \setminus \{\zeta\}$ gilt also

$$|(z - \zeta)^n f_1(z)| = |(z - \zeta)^m g_1(z)| \quad \Leftrightarrow \quad |f_1(z)| = |(z - \zeta)^{m-n} g_1(z)|.$$

Angenommen, es ist $n < m$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f_1 , dass

$$|f_1(\zeta)| = \lim_{z \rightarrow \zeta} |f_1(z)| = \lim_{z \rightarrow \zeta} |(z - \zeta)^{m-n} g_1(z)| = 0$$

im Widerspruch zu $f_1(\zeta) \neq 0$. Somit muss $n = m$ gelten und wir erhalten, dass $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-\zeta)^n f_1(z)}{(z-\zeta)^n g_1(z)}$ eine hebbare Singularität in ζ hat und $\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z)}{g(z)} \neq 0$ gilt. Da ζ als beliebige Nullstelle von g vorgegeben war, kann $\frac{f}{g}$ in allen Singularitäten auf $\partial\mathbb{D}$ in dieser Weise holomorph fortgesetzt werden. Für die holomorphe Fortsetzung kann nun wie in Teil **a** verfahren werden, da ihr Nenner keine Nullstellen in $\partial\mathbb{D}$ mehr hat.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T1A2)

a Eine solche Folge gibt es (!). Da \mathbb{Q} abzählbar ist, gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die alle rationalen Zahlen durchläuft. Da andererseits \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} liegt, liegen in der Umgebung jeder reellen Zahl unendlich viele rationale Zahlen, sodass jede reelle Zahl ein Häufungspunkt der Folge a_n ist. Betrachte nun die Folge

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad b_n = a_n + \frac{i}{n}.$$

Da $\frac{1}{n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, verläuft diese Folge in der oberen Halbebene.

Ist nun $r \in \mathbb{R}$, so gibt es eine Teilfolge $(a_n)_{n \in I}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen r konvergiert. Die Folge $(b_n)_{n \in I}$ konvergiert dann ebenfalls gegen r , d. h. r ist ein Häufungspunkt von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Andererseits kann kein anderer Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sein. Gilt $\text{Im } z < 0$, so wähle $0 < \varepsilon < -\text{Im } z$. Dann ist $B_\varepsilon(z) \cap \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, d. h. z kann kein Häufungspunkt von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sein. Betrachte nun den Fall $\text{Im } z > 0$. Wähle $0 < \varepsilon < \text{Im } z$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq N$ die Ungleichung

$$\frac{1}{n} < \text{Im } z - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im } z - \frac{1}{n} > \varepsilon$$

erfüllt ist. Wegen $|z - b_n| > |\text{Im } z - \text{Im } b_n| = |\text{Im } z - \frac{1}{n}| > \varepsilon$ für $n \geq N$ liegen also die Folgenglieder b_n nicht in $B_\varepsilon(z)$. Somit können höchstens endlich viele Folgenglieder von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $B_\varepsilon(z)$ liegen, was bedeutet, dass z kein Häufungspunkt der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sein kann.

Wir haben gezeigt: $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann Häufungspunkt von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn $\text{Im } z = 0$, also z eine reelle Zahl ist.

b Wir benutzen die Darstellung der komplexen Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ als

$$\partial\mathbb{D} = \left\{ e^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wiederum die rationale Folge, die jede reelle Zahl als Häufungspunkt hat. Dann hat die Folge $(e^{ia_n})_{n \in \mathbb{N}}$ jeden Punkt der komplexen Einheitskreislinie als Häufungspunkt, da $\exp(i\mathbb{R}) = \partial\mathbb{D}$ gilt und die Exponentialfunktion stetig ist. Leider verläuft diese Folge auf der Einheitskreislinie selbst, d. h. nicht in der offenen Einheitskreisscheibe. Dies reparieren wir, indem wir den Radius gegen 1 konvergieren lassen: Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{ia_n}$$

sollte dann eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften sein. Der Nachweis verläuft wie in Teil **a**.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T1A3)

a Sei $r > 1$ eine reelle Zahl und $z \in \partial B_r(0)$, dann gilt die Abschätzung

$$|p(z) - z^n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |z|^k = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot r^k < r^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = r^{n-1} C$$

mit $C = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. Wählt man also $r > C$, so gilt

$$|p(z) - z^n| < r^{n-1} C < r^n = |z|^n.$$

Nach dem Satz von Rouché hat daher $p(z) = (p(z) - z^n) + z^n$ in $B_r(0)$ genauso viele Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) wie das Polynom z^n . Da z^n eine n -fache Nullstelle in 0 hat, sind das genau n . Da r beliebig groß gewählt werden kann, hat $p(z)$ genau n Nullstellen in \mathbb{C} .

b Es ist

$$p'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + nz^{n-1}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{p'(z)}{p(z)} &= \frac{a_1 + 2a_2z + \dots + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + nz^{n-1}}{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n} = \\ &= \frac{n}{z} \left(\frac{a_1z + 2a_2z^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}z^{n-1} + nz^n}{na_0 + na_1z + \dots + na_{n-1}z^{n-1} + nz^n} \right) = \\ &= \frac{n}{z} \left(1 + \frac{-na_0 - (n-1)a_1z - (n-2)a_2z^2 - \dots - a_{n-1}z^{n-1}}{na_0 + na_1z + \dots + na_{n-1}z^{n-1} + nz^n} \right) = \\ &= \frac{n}{z} \cdot (1 + g(z)). \end{aligned}$$

Da der Grad des Polynoms im Nenner von $g(z)$ höher als der Grad des Polynoms im Zähler ist, gilt $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$. Somit ist

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{\partial B_r(0)} \frac{ng(z)}{z} dz \right| &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \cdot n \cdot \max_{z \in \partial B_r(0)} \left| \frac{g(z)}{z} \right| = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \cdot n \cdot \frac{1}{r} \cdot \max_{z \in \partial B_r(0)} |g(z)| = \\ &= 2\pi n \lim_{r \rightarrow \infty} \max_{z \in \partial B_r(0)} |g(z)| = 0. \end{aligned}$$

Also liefert das Nullstellen zählende Integral

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{p'(z)}{p(z)} dz &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{n}{z} \cdot (1 + g(z)) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\partial B_r(0)} \frac{n}{z} dz + \int_{\partial B_r(0)} \frac{ng(z)}{z} dz \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_r(0)} \frac{n}{z} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi i \cdot n = n \end{aligned}$$

Dabei wurde im vorletzten Schritt die Cauchy-Integralformel verwendet.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T1A5)

- a** Die gegebene Differentialgleichung zweiter Ordnung ist äquivalent zum linearen System

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X - 2c \end{pmatrix} = X(X + 2c) + 1 = X^2 + 2cX + 1$$

Die Eigenwerte sind also

$$\lambda_{\pm} = \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 - 4}}{2} = -c \pm \sqrt{c^2 - 1}.$$

Ist $c^2 - 1 \leq 0$, so folgt sofort $\operatorname{Re}(\lambda_{\pm}) = -c < 0$ und das System ist asymptotisch stabil. Im Fall $c^2 - 1 > 0$ ist zumindest $\operatorname{Re}(\lambda_-) = \lambda_- <$

$-c < 0$. Zudem folgt aus der Monotonie der Wurzelfunktion, dass

$$c^2 > c^2 - 1 \Rightarrow c > \sqrt{c^2 - 1} \Leftrightarrow 0 > -c + \sqrt{c^2 - 1}$$

gilt. Also ist auch $\operatorname{Re}(\lambda_+) = \lambda_+ < 0$ und somit ist auch im Fall $c^2 - 1 > 0$ das System asymptotisch stabil.

b Die Lösung $y(t)$ hat die Form

$$y(t) = \Lambda(t, t_0) \begin{pmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix},$$

wobei $\Lambda(t, t_0)$ die Übergangsmatrix bezeichnet. Da das System nach Teil **a** asymptotisch stabil ist, gilt laut 7.28, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t, t_0) = 0$. Also folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t, t_0) \begin{pmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

c Im Fall $c^2 - 1 < 0$ sind die Eigenwerte aus Teil **a** durch $\lambda_{\pm} = -c \pm ia$ gegeben. Ein Fundamentalsystem der Differentialgleichungssystem ist dann

$$\{e^{-ct} \cos at, e^{-ct} \sin at\}.$$

Jede Lösung λ hat daher die Form $\lambda(t) = Ae^{-ct} \cos at + Be^{-ct} \sin at$ mit $A, B \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Bedingung $\lambda(0) = 1$ muss $A = 1$ sein. Wir berechnen weiter

$$\lambda'(t) = -ce^{-ct} \cos at - ae^{-ct} \sin at - cBe^{-ct} \sin at + aBe^{-ct} \cos at.$$

Aus der Bedingung $\lambda'(0) = 0$ erhalten wir daher

$$0 = -c + aB \Leftrightarrow B = \frac{c}{a}.$$

Die gesuchte Lösung ist damit

$$\lambda(t) = e^{-ct} \cos at + \frac{c}{a} e^{-ct} \sin at.$$

Lösungen zu Thema Nr. 2

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T2A4)

- a** Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine holomorphe Funktion. Wegen $-1, -2 \notin \text{im } f \subseteq \mathcal{D}$ muss f nach dem Kleinen Satz von Picard konstant sein. Da eine konstante Funktion auf jeden Fall nicht bijektiv ist, kann f also nicht biholomorph sein.
- b** Sei $w \in \text{im } f$, d. h. $w = f(z)$ für ein $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$f(w) = f(f(z)) \stackrel{(*)}{=} f(z) = w,$$

wobei an der Stelle $(*)$ die Gleichung $f \circ f = f$ verwendet wurde. Nehmen wir nun an, dass f nicht konstant ist (für konstante Funktionen ist die Gleichung $f \circ f = f$ stets erfüllt). Da $\text{im } f = f(\Omega)$ dann nach dem Satz über die Gebietstreue 6.22 wieder ein (nicht-leeres) Gebiet ist, stimmt f auf einem Gebiet mit der Funktion $w \mapsto w$ überein. Laut Identitätssatz gilt dann bereits $f(z) = z$ für alle $z \in \Omega$. Also ist eine solche Funktion f entweder konstant oder die Identitätsabbildung.

Alternative: Gemäß Kettenregel ist

$$f'(f(z)) \cdot f'(z) = f'(z) \quad \Leftrightarrow \quad f'(z) (f'(f(z)) - 1) = 0$$

für alle $z \in \Omega$. Da Ω als Gebiet zusammenhängend und $f'(z)$ bzw. $f'(z) - 1$ wiederum holomorphe Funktionen sind, folgt wie in H06T3A2, dass

$$f'(z) = 0 \quad \text{oder} \quad f'(f(z)) - 1 = 0$$

für alle $z \in \Omega$. Im ersten Fall folgt, dass f konstant ist, im zweiten Fall ist $f'(w) = 1$ für alle $w \in \text{im } \Omega$, d. h. $f(w) = w + c$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Dabei gilt:

$$f(1) = (f \circ f)(1) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + c = f(1 + c) = 1 + 2c \quad \Leftrightarrow \quad c = 0.$$

Wie oben (f nicht-konstant, da sonst $f' \equiv 0$ wäre), folgt aus dem Identitätssatz $f(z) = z$ für alle $z \in \Omega$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T2A5)

a Wir verwenden $\cos(z) = \sin(z + \frac{\pi}{2})$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} (z + \frac{\pi}{2}) \cos z &= (z + \frac{\pi}{2}) \sin(z + \frac{\pi}{2}) = (z + \frac{\pi}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z + \frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= (z + \frac{\pi}{2})^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z + \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n+1)!} =: (z + \frac{\pi}{2})^2 g(z). \end{aligned}$$

Es ist nun $g(-\frac{\pi}{2}) = \frac{0^0}{(0+1)!} = 1 \neq 0$. Aus der Darstellung $f(z) = \frac{1}{(z + \frac{\pi}{2})^2 g(z)}$ folgt daher, dass f in $-\frac{\pi}{2}$ einen Pol zweiter Ordnung hat. Um die restlichen Singularitäten bestimmen zu können, brauchen wir die Nullstellen der komplexen Kosinusfunktion:

$$\begin{aligned} \cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i\pi} \cdot e^{-iz} = e^{i(\pi-z)} \\ &\Leftrightarrow z \equiv \pi - z \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \Leftrightarrow 2z \equiv \pi \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Die einzige andere Singularität von f in Ω ist daher $\frac{\pi}{2}$. Hier gilt

$$\begin{aligned} \cos z = \cos(-z) &= \sin(-z + \frac{\pi}{2}) = -\sin(z - \frac{\pi}{2}) = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = (z - \frac{\pi}{2}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n+1)!} = \\ &=: (z - \frac{\pi}{2}) \cdot h(z). \end{aligned}$$

Die hintere Summe $h(z)$ hat wieder keine Nullstelle bei $\frac{\pi}{2}$, deshalb hat f einen Pol erster Ordnung in $\frac{\pi}{2}$.

b Mithilfe der Darstellung aus Teil **a** ist $\text{Res}(f; \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi h(\frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\pi}$ und

$$\text{Res}(f; -\frac{\pi}{2}) = \left(\frac{1}{g(z)} \right)' \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}} = \frac{-g'(-\frac{\pi}{2})}{g^2(-\frac{\pi}{2})} = 0,$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot 2k \frac{(z + \frac{\pi}{2})^{2k-1}}{(2k+1)!}$$

keinen konstanten Koeffizienten hat.

- c** f hat genau dann eine Stammfunktion falls das Integral über jede beliebige geschlossene Kurve verschwindet (vgl. Proposition 6.29). Allerdings gilt laut Residuensatz

$$\int_{\partial B_\varepsilon(\frac{\pi}{2})} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f; \frac{\pi}{2}\right) = -2i \neq 0.$$

- d** Sei $p(z) = f(z) + \frac{c}{(z-\frac{\pi}{2})}$. Setze $c = \frac{1}{\pi}$, dann gilt

$$\operatorname{Res}\left(p; \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Res}\left(f; -\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{c}{z-\frac{\pi}{2}}; -\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\pi} + c = 0.$$

Ist $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ nun eine geschlossene Kurve, so gilt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} p(z) dz &= 2\pi i \left(n(\gamma, -\frac{\pi}{2}) \operatorname{Res}\left(p; -\frac{\pi}{2}\right) + n(\gamma, \frac{\pi}{2}) \operatorname{Res}\left(p; \frac{\pi}{2}\right) \right) = \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Folglich besitzt p eine Stammfunktion auf Ω .

Lösungen zu Thema Nr. 3

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T3A1)

Wegen

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z(z+1)(z+1-i)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z+1)(z+1-i)^2} = \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i$$

handelt es sich bei 0 um eine hebbare Singularität von f . Folglich ist $\operatorname{Res}(f; 0) = 0$. Dagegen ist wegen

$$\lim_{z \rightarrow -1} |f(z)| = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \frac{-1}{-(-i)^2} = -1$$

die Singularität -1 eine Polstelle erster Ordnung. Obige Rechnung zeigt außerdem $\operatorname{Res}(f; -1) = -1$. Zu guter Letzt ist $-1+i$ wegen

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -1+i} |f(z)| &= \lim_{z \rightarrow -1+i} |(z+1-i)f(z)| = \infty, \\ \lim_{z \rightarrow -1+i} (z+1-i)^2 f(z) &= \frac{-1+i}{i(-1+i)} = -i \end{aligned}$$

ein Pol zweiter Ordnung. Hier berechnet sich das Residuum zu

$$\operatorname{Res}(f; -1+i) = \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z^2+z} \right) \Big|_{z=-1+i} = \left(\frac{-1}{(z+1)^2} \right) \Big|_{z=-1+i} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Nach dem Residuensatz gilt nun

$$\int_{\gamma(r)} f(z) dz = 2\pi i [n(\gamma(r), 0) \operatorname{Res}(f; 0) + n(\gamma(r), -1) \operatorname{Res}(f; -1) + n(\gamma(r), -1+i) \operatorname{Res}(f; -1+i)].$$

Für $r < 1$ wird nur die Singularität 0 von $\gamma(r)$ umlaufen, d. h. hier ist $n(\gamma(r), 0) = 1$ und $n(\gamma(r), -1) = 0 = n(\gamma(r), -1+i)$. Der Wert des Integrals ist damit

$$\int_{\gamma(r)} f(z) dz = 2\pi i \cdot 1 \cdot \operatorname{Res}(f; 0) = 0.$$

Für $r \in]1, \sqrt{2}[$ ist $0, -1 \in B_r(0)$, aber $-1+i \notin B_r(0)$, da $|-1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Also erhält man hier

$$\int_{\gamma(r)} f(z) dz = 2\pi i (1 \cdot \operatorname{Res}(f; 0) + 1 \cdot \operatorname{Res}(f; -1)) = -2\pi i.$$

Ist $r > \sqrt{2}$, so werden alle Singularitäten umlaufen. Man berechnet hier deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(r)} f(z) dz &= 2\pi i (1 \cdot \operatorname{Res}(f; 0) + 1 \cdot \operatorname{Res}(f; -1) + 1 \cdot \operatorname{Res}(f; -1+i)) = \\ &= 2\pi i(1-1) = 0. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T3A2)

a Eine Singularität a einer Funktion f heißt *isoliert*, falls es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von a gibt, sodass in U (neben a) keine weitere Singularität von f liegt. Ist nun

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

eine Laurentreihenentwicklung von f um a , so heißt a

- (i) *hebbar*, falls $a_n = 0$ für alle $n < 0$,
- (ii) *Polstelle* der Ordnung k , falls $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$,
- (iii) *wesentliche Singularität*, falls a weder hebbar noch Polstelle ist.

b Es gilt

$$\lim_{z \rightarrow 2} |h(z)| = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow 2} (z-2)h(z) = 2 \exp\left(\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

also handelt es sich bei $z = 2$ um eine Polstelle erster Ordnung. Weiter ist

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} h(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{z-2} \exp\left(\sin\left(\frac{z-1}{z(z-1)}\right)\right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{z-2} \exp\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -\exp \sin 1 \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

sodass in 1 eine hebbare Singularität vorliegt. Nun fehlt nur noch die Klassifikation der Singularität in 0. Betrachte dazu die Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n = \frac{1}{n\pi}$ und $v_n = \frac{2}{\pi + 4n\pi}$. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ und

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n - 2} \exp\left(\sin\left(\frac{1}{u_n} \frac{u_n - 1}{u_n u_n - 1}\right)\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(\sin(n\pi))}{u_n - 2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n - 2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Außerdem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n - 2} \exp\left(\sin\left(\frac{1}{v_n} \frac{v_n - 1}{v_n v_n - 1}\right)\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{v_n - 2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{v_n - 2} = -\frac{e}{2}. \end{aligned}$$

Also hat die Funktion $g: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z-2} \exp\left(\sin\left(\frac{z-1}{z^2-z}\right)\right)$ eine wesentliche Singularität bei 0. Eine Laurentreihendarstellung um 0 von g mit Koeffizienten a_k erfüllt also $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$. Bezeichnet b_n die Koeffizienten der Laurentreihenentwicklung von h , so ist

$$h(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k = z \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k-1} z^k$$

Daraus folgt $b_k = a_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und somit muss auch h unendliche viele negative Koeffizienten besitzen, also eine wesentliche Singularität bei 0 haben.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T3A3)

a Definiere eine Funktion

$$\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, f) \mapsto f(f-1)(f+1),$$

dann handelt es sich bei Φ um eine stetige und auf einem Gebiet definierte Funktion, die die rechte Seite der gegebenen Differentialgleichung beschreibt. Weiter ist

$$\partial_f \Phi(t, f) = \partial_f (f^3 - f) = 3f^2 - 1$$

ebenfalls stetig, sodass Φ lokal Lipschitz-stetig bezüglich f ist. Aus dem Globalen Existenz- und Eindeigkeitssatz folgt nun, dass $f' = \Phi(t, f)$ eine eindeutige maximale Lösung zum Anfangswert $f(0) = f_0$ besitzt.

b Betrachte die konstante Funktion

$$\mu_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto 1.$$

Es ist μ_1 Lösung der Differentialgleichung $\Phi(t, f) = f'$ und da sie auf ganz \mathbb{R} definiert ist, handelt es sich dabei um die eindeutige maximale Lösung zum Anfangswert $f(0) = 1$.

Sei nun $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ die laut Teil **a** eindeutige Lösung zum Anfangswert $\lambda(0) = f_0 < 1$. Angenommen, es gibt ein $\tau \in I$ mit $\lambda(\tau) = a > 1$ für ein $\tau \in I$. Da λ stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz dann ein $\tau_1 \in I$, sodass $f(\tau_1) = 1 = \mu_1(\tau_1)$. Da die Lösungskurven maximaler Lösungen entweder disjunkt oder schon gleich sind und λ die Einschränkung einer maximalen Lösung ist, folgt daraus bereits $\lambda(t) = \mu_1(t) = 1$ für alle $t \in I$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $\lambda(0) = f_0 < 1$.

c Sei $\lambda:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutige maximale Lösung mit $\lambda(0) = f_0 > 1$. Wenn wir zeigen können, dass $\lim_{t \searrow a} \lambda(t) = 1$ und $\lim_{t \nearrow b} \lambda(t) = +\infty$ gilt, sind wir fertig, denn dann gibt es für jedes $\xi > 1$ reelle Zahlen $t_1, t_2 \in]a, b[$ mit

$$\lambda(t_1) \leq \xi \leq \lambda(t_2).$$

Nach dem Zwischenwertsatz wird dann der Wert ξ von f auf jeden Fall angenommen. Wir zeigen daher nun die Aussage über das Grenzwertverhalten.

Wie in Teil **b** zeigt man unter Verwendung der konstanten Lösung μ_1 , dass $\lambda(t) > 1$ für alle $t \in I$ gilt. Aus der Lösungsidentität folgt dann, dass

$$\lambda'(t) = \Phi(t, \lambda(t)) = \lambda(t)(\lambda(t) - 1)(\lambda(t) + 1) > 0$$

für alle $t \in I$ gilt. Also ist λ auf ganz I streng monoton steigend. Falls eine der Grenzen a oder b endlich ist, so folgt aus der Charakterisierung des Randverhaltens maximaler Lösungen 7.13, dass

$$\lim_{t \searrow a} |\lambda(t)| = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t \nearrow b} |\lambda(t)| = \infty.$$

Da λ streng monoton steigend ist, muss sogar

$$\lim_{t \searrow a} \lambda(t) = -\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t \nearrow b} \lambda(t) = +\infty$$

gelten. Die linke Aussage ist unmöglich, denn λ ist durch 1 nach unten beschränkt, also muss $a = -\infty$ gelten. Ist die rechte Aussage erfüllt, so sind wir laut den Ausführungen oben fertig. Nehmen wir also im Folgenden an, dass $b = +\infty$ ist. Da λ streng monoton steigend ist, haben wir $\lambda(t) \geq \lambda(0) = f_0 > 1$ für alle $t \geq 0$, sodass

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda(0) + \int_0^t \lambda'(\tau) \, d\tau = \lambda(0) + \int_0^t \lambda(\tau)(\lambda(\tau) - 1)(\lambda(\tau) + 1) \, d\tau \geq \\ &\geq \lambda(0) + \int_0^t f_0(f_0 - 1)(f_0 + 1) \, d\tau = \lambda(0) + f_0(f_0 - 1)(f_0 + 1)t \end{aligned}$$

für $t \geq 0$ gilt. Daraus folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$, wie erhofft.

Für alle $t \leq 0$ gilt $1 < \lambda(t) < f_0$, sodass $\lambda(t)$ für $t \rightarrow -\infty$ gegen einen endlichen Wert $c \in [1, f_0[$ gehen muss. Angenommen, es ist $c > 1$, dann gilt $\lambda(t) \geq c$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $t \leq 0$ haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda(0) + \int_0^t \lambda'(\tau) \, d\tau = f_0 - \int_t^0 \lambda'(\tau) \, d\tau = \\ &= f_0 - \int_t^0 \lambda(\tau)(\lambda(\tau) - 1)(\lambda(\tau) + 1) \, d\tau \leq \\ &\leq f_0 - \int_t^0 c(c - 1)(c + 1) \, d\tau = f_0 + c(c - 1)(c + 1)t \end{aligned}$$

Daraus jedoch $\lim_{t \rightarrow -\infty} \lambda(t) = -\infty$ im Widerspruch dazu, dass λ durch 1 nach unten beschränkt ist. Insgesamt muss $\lim_{t \rightarrow -\infty} \lambda(t) = 1$ gelten.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2015, T3A4)

a Sei $r > 0$. Laut Cauchy-Integralformel gilt

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Als Abschätzung erhält man daraus

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial B_r(0)} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| dz \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{Mr^\alpha}{r^{n+1}} = n!Mr^{\alpha-n}$$

Ist $n > \alpha$, so ist $\alpha - n < 0$ und damit $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\alpha-n} = 0$. Also bekommen wir

$$|f^{(n)}(0)| = \lim_{r \rightarrow \infty} n!Mr^{\alpha-n} = 0,$$

weswegen $f^{(n)}(0) = 0$ sein muss.

b Da p ganz ist, gibt es eine auf ganz \mathbb{C} gültige Potenzreihendarstellung

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

wobei die Koeffizienten durch $a_n = \frac{1}{n!} p^{(n)}(0)$ gegeben sind. Aus der Voraussetzung folgt also $a_n = 0$ für alle $n > n_0$ und somit

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n.$$

c Nach Aufgabenteil **a** gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n > \alpha$. Setze $n_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, dann gilt auch $f^{(n)}(0) = 0$ für $n > n_0$ und aus Aufgabenteil **b** folgt, dass f ein Polynom von Grad (höchstens) n_0 ist. Ist f ein Polynom von Grad 0, so ist f konstant. Ist dagegen $\text{grad } f \geq 1$, so hat f nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Prüfungstermin: Frühjahr 2016

Thema Nr. 1 (Aufabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 149

2 + 4 Punkte

- a** Finden Sie eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, welche in den Punkten -1 und 1 wesentliche Singularitäten mit den Residuen

$$\operatorname{Res}(f; -1) = -1, \quad \operatorname{Res}(f; 1) = 1$$

besitzt. Ist f durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt?

- b** Sei f die in **a** gefundene Funktion. Für $\alpha \in [0, \infty[$ sei γ_α der geschlossene Weg, der die Punkte

$$2 + \alpha i, \quad -2 - i, \quad -2 + i, \quad 2 - \alpha i, \quad 2 + \alpha i$$

in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet. Für welche Werte von α ist das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_\alpha} f(z) \, dz$$

definiert? Berechnen Sie das Integral für diese Werte von α .

Aufgabe 2 → S. 151

3 + 3 Punkte

- a** Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n

$$\sum_{k=1}^n (4k^3 - 6k^2) = n^4 - 2n^2 - n.$$

- b** Zeigen Sie durch Induktion in n , dass für $G_r(k) := \prod_{l=0}^{r-1} (k+l)$ (also mit $G_0(k) = 1$) die Formeln

$$\sum_{k=1}^n G_r(k) = \frac{1}{r+1} G_{r+1}(n)$$

gelten, für alle $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 → S. 152

2 + 4 Punkte

Sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) := ((1 - |x|)^{-1}, |x|)$. Zeigen Sie:

a Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0$$

besitzt eine eindeutige bestimmte, maximale Lösung.

- b** Für diese maximale Lösung $x:]a, b[\rightarrow D$, wobei $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$, ist $b \leq 1$, $x(b) = \lim_{t \rightarrow b} x(t)$ existiert und $|x(b)| = 1, 0 < x_2(b) < 1/4$.

Hinweis Die Trajektorie der Lösung lässt sich als Graph einer Funktion darstellen und deren Ableitung lässt sich geeignet abschätzen.

Aufgabe 4 → S. 154

4 + 2 Punkte

- a** Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für jede Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

genau eine der folgenden Aussagen zutrifft:

- (i) x ist streng monoton wachsend.
 - (ii) x ist streng monoton fallend.
 - (iii) x ist konstant.
- b** Bleibt die Aussage in **a** richtig, wenn $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nur als stetig vorausgesetzt wird?

Aufgabe 5 → S. 154

3 + 3 Punkte

- a** Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, \infty[$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, und bestimmen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) \, dx.$$

- b** Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 0$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) \, dx.$$

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 156

1 + 5 Punkte

Begründen Sie, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^6 + 3} dx$$

existiert, und berechnen Sie I mithilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 2 → S. 158

2 + 1 + 3 Punkte

Zeigen Sie, dass das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin(x)$$

auf dem Phasenraum \mathbb{R}^2

- a** für alle Anfangswerte $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $\phi_{z_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt.
- b** Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = y^2/2 - \cos(x)$ eine Erhaltungsgröße ist, also entlang der Lösungskurven ϕ_{z_0} konstant ist.
- c** Bestimmen Sie, ob die Gleichgewichtslage $0 \in \mathbb{R}^2$ stabil oder sogar asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 3 → S. 159

6 Punkte

Berechnen Sie, für welche Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^3$ die Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{mit der Systemmatrix } A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

für $t \rightarrow +\infty$ gegen die Ruhelage $r := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ konvergiert.

Hinweis Sie müssen nicht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bestimmen, um die Aufgabe zu lösen.

Aufgabe 4 → S. 161

2 + 2 + 2 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- a** Stetige Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig.
- b** Die Umkehrfunktion $f^{-1}: (c, d) \rightarrow (a, b)$ einer stetig differenzierbaren streng monotonen Funktion $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ ist ebenfalls stetig differenzierbar.
- c** Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/(1 + x^2)$ ist reell-analytisch, und ihre Potenzreihendarstellung bei $x = 0$ besitzt den Konvergenzradius 1.

Aufgabe 5 → S. 162

1 + 1 + 2 + 2 Punkte

Gegeben sei die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Zeigen Sie:

- a** Der Konvergenzradius von f ist 1.
- b** Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt $|f(z^{2^k})| \leq |f(z)| + k$.
- c** Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und ρ eine 2^k -te Einheitswurzel. Dann gilt $\lim_{t \rightarrow 1, 0 < t < 1} |f(t\rho)| = \infty$.
- d** Für keinen Punkt z des Randes seines Konvergenzgebietes ist f auf eine offene Umgebung von z holomorph fortsetzbar.

Thema Nr. 3
 (Aufgabengruppe)
Aufgabe 1 → S. 163

2 + 2 + 2 Punkte

Es sei $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

- a** Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularität von f bei 0.
- b** Es sei $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, t \mapsto e^{2it}$. Berechnen Sie $\int_{\gamma} f(z) dz$.
- c** Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. Zeigen Sie, dass es keine Folge von Polynomfunktionen $(p_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, sodass $(p_n|_U)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert.

Aufgabe 2 → S. 164

1 + 5 Punkte

a Zeigen Sie, dass $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1+x^3}$ stetig und integrierbar ist.**b** Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3} dx$.**Hinweis** Sie können einen geschlossenen Weg verwenden, der durch 0, R und $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ geht, oder die Partialbruchzerlegung benutzen.**Aufgabe 3** → S. 166

1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 Punkte

Zeigen Sie:

a Ist $S := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < 1\}$, so gibt es keine biholomorphe Abbildung $f: S \rightarrow \mathbb{C}$.**b** Es gibt keine holomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(0) = 2i$ und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.**c** Ist $U := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(-2) = 1$ und $f(2) = -1$, dann gibt es $z, w \in U$ mit $f(z), f(w) \in \mathbb{R}$ und $f(z) < -1, f(w) > 1$.**d** Es gibt eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und $e^{\frac{1}{z_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} i$.**Aufgabe 4** → S. 167

3 + 3 Punkte

Zeigen Sie:

a Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = (x^2 - 1) \sin t, \quad x(0) = 0$$

hat eine eindeutige auf ganz \mathbb{R} definierte, beschränkte Lösung.**b** Zu jedem $\tau \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in \mathbb{R}^2$ existieren die maximalen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y \\ \dot{y} &= 2x + 4x^3 \end{aligned}$$

zur Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \zeta$ auf ganz \mathbb{R} .**Aufgabe 5** → S. 429

4 + 1 + 1 Punkte

Es sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix e^{At} zu $\dot{x} = Ax$.

b Bestimmen Sie die Lösung von

$$\dot{x} = Ax, x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c Zeigen Sie, dass die Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stabil ist.

Lösungen zu Thema Nr. 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T1A1)

a Wir definieren

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) - \sin\left(\frac{1}{z+1}\right).$$

Auf ihrem Definitionsbereich ist die Funktion gemäß der Quotienten- und Kettenregel holomorph. Wir zeigen, dass die beiden Singularitäten ± 1 wesentlich sind, indem wir den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung in diesen Punkten angeben. Entwickeln wir f zunächst auf der punktierten Umgebung $B_2(1) \setminus \{1\}$. Hier ist der zweite Summand holomorph, sodass dessen Hauptteil verschwindet. Für den ersten Summanden erhalten wir

$$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^{-(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

und sehen an dieser Darstellung, dass der Hauptteil der Reihe nicht abbricht und $\text{Res}(f; 1) = 1$ gilt.

In analoger Weise genügt es, Hauptteil des zweiten Summanden auf dem Bereich $B_2(-1) \setminus \{-1\}$ zu betrachten. Wir erhalten mit

$$-\sin\left(\frac{1}{z+1}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z+1)^{-(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

wiederum einen nicht-abbrechenden Hauptteil sowie $\text{Res}(f; -1) = -1$, wie gewünscht.

Eine Funktion ist durch diese Eigenschaften nicht eindeutig bestimmt. Beispielsweise kann einfach eine beliebige ganze Funktion addiert werden, ohne dass sich am Typ der Singularitäten oder an den Residuen etwas ändert.

b Das Integral existiert genau dann, wenn keine der Singularitäten auf γ_α liegt. Alle Punkte der geraden Verbindung von $-2 - i$ und $-2 + i$ haben Realteil -2 , also liegt hier sicher keine Singularität. Analoges gilt für die gerade Verbindung von $2 - \alpha i$ und $2 + \alpha i$. Das Geradenstück zwischen $2 + \alpha i$ und $-2 - i$ parametrisieren wir durch

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto (1-t)(2 + \alpha i) + t(-2 - i) = (2 - 4t) + i(\alpha - \alpha t - t).$$

Es ist $\gamma(t) = 1$, wenn

$$2 - 4t = 1 \quad \text{und} \quad \alpha - \alpha t - t = 0$$

gilt. Die erste Gleichung liefert $t = \frac{1}{4}$ und Einsetzen in die zweite ergibt $\alpha = \frac{1}{3}$. Eine analoge Überlegung zeigt, dass $\gamma(t) = -1$ im Fall $t = \frac{3}{4}$ und $\alpha = 3$ gilt. Für den Weg

$$\delta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto (1-t)(-2+i) + t(2-\alpha i) = -(2+4t) - i(1-t-\alpha t)$$

ergeben sich genau dieselben Werte für α und t , was zeigt, dass das Wegintegral für $\alpha \notin \{\frac{1}{3}, 3\}$ existiert.

Wir bestimmen im Folgenden die Umlaufzahlen intuitiv. Für $\alpha \in [0, \frac{1}{3}[$ werden beide Punkte einmal in negativer Richtung umlaufen, also haben wir hier mit dem Residuensatz

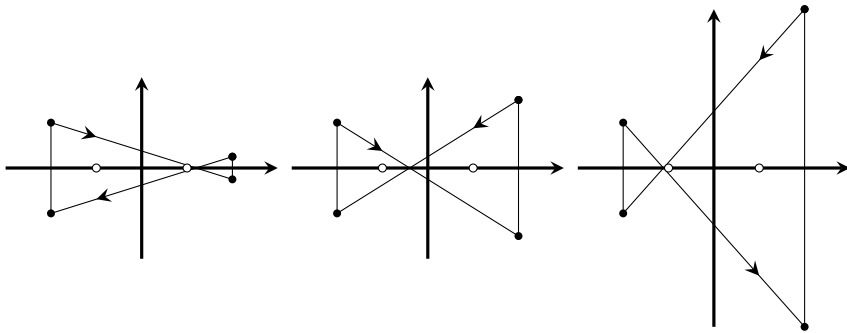
$$\int_{\gamma_\alpha} f(z) dz = 2\pi i((-1) \operatorname{Res}(f; 1) + (-1) \operatorname{Res}(f; -1)) = 2\pi i(-1+1) = 0.$$

Für $\alpha \in]\frac{1}{3}, 3[$ wird 1 in positiver, -1 in negativer Richtung umlaufen, sodass wir hier

$$\int_{\gamma_\alpha} f(z) dz = 2\pi i(1 \operatorname{Res}(f; 1) - 1 \operatorname{Res}(f; -1)) = 4\pi i$$

erhalten. Für $\alpha \in]3, \infty[$ werden beide Punkte schließlich in positiver Richtung umlaufen und wir haben

$$\int_{\gamma_\alpha} f(z) dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f; 1) + \operatorname{Res}(f; -1)) = 0.$$



Die Abbildungen zeigen die Kurven γ_α für $\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = 1.5$ und $\alpha = 3.5$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T1A2)

- a** Wir zeigen die Aussage durch vollständige Induktion über n . Im Fall $n = 1$ ist

$$\sum_{k=1}^1 (4k^3 - 6k^2) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 = -2 = 1^4 - 2 \cdot 1^2 - 1,$$

die Aussage also wahr. Setzen wir die Aussage daher für ein n als bereits bewiesen voraus. Unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes gilt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (4k^3 - 6k^2) &= 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + \sum_{k=1}^n (4k^3 - 6k^2) = \\ &\stackrel{(I.V.)}{=} 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + n^4 - 2n^2 - n = \\ &= 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 4(n^2 + 2n + 1) - 2(n+1)^2 \\ &\quad + n^4 - 2n^2 + 1 - (n+1) = \\ &= (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 2(n+1)^2 - (n+1) = \\ &= (n+1)^4 - 2(n+1)^2 - (n+1) \end{aligned}$$

- b** Sei $r \in \mathbb{N}_0$ beliebig vorgegeben. Der Induktionsanfang lautet hier

$$G_r(1) = \prod_{l=0}^{r-1} (1+l) = \frac{1+r}{1+r} \prod_{l=0}^{r-1} (1+l) = \frac{1}{r+1} \prod_{l=0}^r (1+l) = \frac{1}{r+1} G_{r+1}(1).$$

Gehen wir daher zum Induktionsschritt über:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} G_r(k) &= G_r(n+1) + \sum_{k=1}^n G_r(k) = \\
 &\stackrel{(I.V.)}{=} G_r(n+1) + \frac{1}{r+1} G_{r+1}(n) = \\
 &= \prod_{l=0}^{r-1} (n+1+l) + \frac{1}{r+1} \prod_{l=0}^r (n+l) = \\
 &= \frac{1}{r+1} \left((r+1) \prod_{l=0}^{r-1} (n+l+1) + n \prod_{l=0}^{r-1} (n+l+1) \right) = \\
 &= \frac{1}{r+1} \prod_{l=0}^{r-1} (n+l+1) \cdot ((r+1) + n) = \\
 &= \frac{1}{r+1} \prod_{l=0}^r (n+1+l) = \frac{1}{r+1} G_{r+1}(n+1)
 \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T1A3)

- a** Die Menge D ist ein Gebiet mit $(0,0) \in D$, wegen $\|x\| \neq 1$ für $(x_1, x_2) \in D$ ist f auf D stetig. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \stackrel{(\nabla)}{\leq} \|x - y\|,$$

also ist $\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Daraus folgert man leicht, dass auch die Abbildung $x \mapsto 1 - \|x\|$ Lipschitz-stetig ist. Betrachte nun für $\|x\| < 1$ die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|}$. Sei U eine offene und genügend kleine Umgebung eines Punktes $x_1 \in D$, sodass der Abschluss \bar{U} ebenfalls in D liegt. Dann ist \bar{U} beschränkt und abgeschlossen, also kompakt, sodass $x \mapsto (1 - \|x\|)^{-1}$ dort ein ein Maximum M annimmt. Wir erhalten für $x_2 \in \bar{U}$:

$$\left\| \frac{1}{1-\|x_1\|} - \frac{1}{1-\|x_2\|} \right\| = \left\| \frac{(1-\|x_2\|) - (1-\|x_1\|)}{(1-\|x_1\|)(1-\|x_2\|)} \right\| \leq L \cdot M^2 \|x_1 - x_2\|,$$

wobei L die Lipschitz-Konstante von $x \mapsto 1 - \|x\|$ beschreibt. Somit ist $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|}$ zumindest lokal Lipschitz-stetig. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass die Komponentenfunktionen f_1 und f_2 von f Lipschitz-stetig

sind. Seien L_1, L_2 die zugehörigen Lipschitz-Konstanten. Dann gilt

$$\|f(x_1, x_2)\| = \sqrt{f_1(x_1, x_2)^2 + f_2(x_1, x_2)^2} \leq \sqrt{L_1^2 + L_2^2} =: L$$

Also ist auch f selbst Lipschitz-stetig bezüglich x . Damit folgt aus dem Globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz, dass das angegebene Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung hat.

b Sei $I =]a, b[$ und $x = (x_1, x_2): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösung der Gleichung, dann gilt laut Definition einer Lösung insbesondere $\|(x_1(t), x_2(t))\| < 1$ für $t \in I$. Es ist $\|x(t)\| \geq |x_1(t)|$. Für die erste Komponente gilt die Abschätzung

$$x_1(t) = \int_0^t \frac{1}{1 - \|(x_1(s), x_2(s))\|} ds \geq \int_0^t 1 ds = t.$$

Wäre also $b > 1$, so wäre $1 \in I$ und $\|x_1(1)\| \geq 1$ – im Widerspruch dazu, dass laut Definition einer Lösung $x(t) \in D$ für alle $t \in I$ gelten muss.

Wir verwenden nun den Satz vom Randverhalten maximaler Lösungen: Wegen $x(t) \in D$ ist $\|x\|$ durch 1 beschränkt, $b = \infty$ hatten wir gerade ausgeschlossen, also kommt nur $\lim_{t \rightarrow b} \text{dist}(\|x(t)\|, \partial D) = 0$ infrage. Zusammen mit $\partial D = \{x \in D \mid |x| = 1\}$ bedeutet dies gerade, dass $x(b) = \lim_{t \rightarrow b} x(t)$ existiert und $|x(b)| = 1$ gilt.

Für die letzte zu zeigende Aussage schreiben wir die Punkte der Trajektorie $\{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in I\}$ als Graph einer Funktion $x_2(x_1)$. Aus der Differentialgleichung folgt unter Verwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_2(x_1(t)) &= \frac{dx_2}{dx_1}(x_1(t)) \cdot \frac{dx_1}{dt}(t) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{dx_2}{dt} \cdot \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^{-1} = \|(x_1, x_2)\| (1 - \|(x_1, x_2)\|). \end{aligned}$$

Die zugehörige Integralgleichung lautet

$$x_2(x_1) = \int_0^{x_1} \|(x_1, x_2)\| (1 - \|(x_1, x_2)\|) dx_1,$$

wobei der Integrand wegen $0 \leq \|(x_1, x_2)\| < 1$ nicht-negativ ist. Wir schätzen den Integranden geeignet nach oben ab: Betrachte dazu die Funktion $g(t) = t(1-t) = -t^2 + t$. Es gilt $g'(t) = 0$ genau für $t = \frac{1}{2}$, also hat diese bei $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ein Maximum. Der Integrand ist nun gerade

$g(\|(x_1, x_2)\|)$, also folgt für $x_1 \in]0, 1[$

$$x_2(x_1) \leq \int_0^{x_1} \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4}x_1 < \frac{1}{4}.$$

Insbesondere haben wir also $0 < x_2(b) < \frac{1}{4}$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T1A4)

- a** Sei $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Angenommen, die Ableitung λ' besitzt eine Nullstelle $\tau \in I$, d. h. $\lambda'(\tau) = 0$. Dann folgt

$$0 = \lambda'(\tau) = f(\lambda(\tau)),$$

sodass $\lambda(\tau)$ eine Nullstelle von f sein muss. Die konstante Funktion $t \mapsto \lambda(\tau)$ ist dann eine Lösung der Differentialgleichung, die auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Da f stetig differenzierbar ist, ist der Globale Existenz- und Eindeigkeitssatz auf die Differentialgleichung anwendbar, sodass $t \mapsto \lambda(\tau)$ die eindeutige maximale Lösung von

$$x' = f(x), \quad x(\tau) = \lambda(\tau)$$

ist. Nun ist λ ebenfalls eine Lösung dieser Differentialgleichung, weshalb λ eine Einschränkung dieser konstanten Lösung sein muss. Insbesondere ist λ selbst konstant.

Sei λ eine nicht-konstante Lösung, dann folgt aus dem gerade Gezeigten, dass die Ableitung λ' keine Nullstelle hat. Folglich muss für alle $t \in I$ entweder $\lambda'(t) > 0$ oder $\lambda'(t) < 0$ gelten. Das bedeutet gerade, dass λ entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist.

- b** Betrachte als Gegenbeispiel die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{|x|}$, welche stetig, aber nicht stetig differenzierbar in 0 ist. Das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x), x(0) = 0$ besitzt dann die Lösung

$$\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Auf diese Lösung trifft keine der drei Charakterisierungen aus Teil **a** zu, denn es ist $\lambda(-1) = \lambda(0)$, also ist λ nicht streng monoton, wegen $\lambda(2) = 1 \neq \lambda(0)$ aber auch nicht konstant.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T1A5)

a Betrachte zunächst für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung

$$f'_n(x) = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} + \frac{x}{n^2} \cdot \left(\frac{-1}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \left(1 - \frac{x}{n}\right).$$

Die Ableitung verschwindet also genau dann, wenn $x = n$ gilt, und hat dort einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$. Folglich besitzt f_n ein globales Maximum bei n und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ unter Verwendung von $f_n(x) \geq 0$, dass

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(n) = \frac{n}{n^2} e^{-\frac{n}{n}} = \frac{1}{ne}.$$

Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $N > \frac{1}{\varepsilon e}$, dann gilt für alle $n \geq N$ und $x \in [0, \infty[$, dass

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{ne} \leq \frac{1}{Ne} < \frac{\varepsilon e}{e} = \varepsilon.$$

Dies zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, \infty[$ gegen 0.

Da es sich bei dem gesuchten Integral um ein uneigentliches Integral handelt, lassen sich Grenzwertübergang und Integration nicht ohne Weiteres vertauschen. Wir berechnen stattdessen mittels partieller Integration eine Stammfunktion:

$$\int \frac{x}{n^2} e^{-x/n} dx = \left[\frac{-x}{n} e^{-x/n} \right] - \int \frac{-1}{n} e^{-x/n} dx = -\frac{1}{n} (x+n) e^{-x/n}.$$

Daraus ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\infty f_n(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f_n(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} (R+n) e^{-R/n} = 1.$$

Somit ist der gesuchte Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

b Ist $0 \leq q < 1$, so konvergiert $\sum_{k=0}^\infty q^k$ als geometrische Reihe, also muss $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren. Aufgrund der Stetigkeit von f folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(q^n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} q^n\right) = f(0) = 0.$$

Das bedeutet, die Folge $(f(x^n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0, 1[$, und damit fast überall auf $[0, 1]$, punktweise gegen 0.

Die Folge $f(x^n)$ konvergiert im Allgemeinen jedoch nicht gleichmäßig auf $[0, 1[$ gegen 0, weshalb wir hier nicht analog zu Teil **a** argumentieren können. Wir verwenden daher den Satz über majorisierte Konvergenz. Dieser besagt, dass sich Grenzwertbildung und Integration auch dann vertauschen lassen, wenn die Funktionenfolge f_n fast überall punktweise gegen f konvergiert, und es eine integrierbare positive Funktion g gibt, so dass $|f(x)| \leq g(x)$ für $x \in I$ gilt.

Die erste Voraussetzung haben wir bereits gezeigt. Zusätzlich ist f als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ beschränkt, d. h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt. Wegen $x^n \in [0, 1]$ für alle $x \in [0, 1]$ ist insbesondere auch $|f(x^n)| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $|f(x)| \leq c$. Damit folgt mit dem eben zitierten Satz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n) \, dx = \int_0^1 0 \, dx = 0.$$

Lösungen zu Thema Nr. 2

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T2A1)

Das Integral existiert, da das Nennerpolynom in \mathbb{R} nullstellenfrei ist und sein Grad um mehr als 2 größer als der des Zählerpolynoms ist. Für $R \in \mathbb{R}^+$ definiere die Wege

$$\gamma_1: [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto t, \quad \gamma_2: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto Re^{it}.$$

Diese Wege bilden zusammen einen geschlossenen, in \mathbb{C} nullhomologen Weg, der sein Inneres genau einmal umläuft. Nach dem Residuensatz gilt daher

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \sum_{a \in M} \text{Res}(f; a),$$

wobei $f(z) = \frac{2}{z^6+3}$ und M die Menge der von $\gamma_1 * \gamma_2$ umlaufenen Singularitäten von f bezeichnet. Ist z eine Nullstelle des Nenners, so gilt

$$|z|^6 = |z^6| = |-3| = 3 \Leftrightarrow |z| = \sqrt[6]{3}.$$

Also existiert ein $\varphi \in [0, 2\pi[$, sodass $z = \sqrt[6]{3}e^{i\varphi}$. Die Äquivalenz

$$z^6 = -3 \Leftrightarrow 3e^{6i\varphi} = 3e^{i\pi} \Leftrightarrow 6i\varphi = i\pi + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

liefert somit die Nullstellen

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{3}e^{i\pi/6}, & z_2 &= \sqrt[6]{3}e^{3i\pi/6}, & z_3 &= \sqrt[6]{3}e^{5i\pi/6}, \\ z_4 &= \sqrt[6]{3}e^{7i\pi/6}, & z_5 &= \sqrt[6]{3}e^{9i\pi/6}, & z_6 &= \sqrt[6]{3}e^{11i\pi/6}. \end{aligned}$$

Da nur z_1, z_2 und z_3 positiven Imaginärteil haben, werden nur diese drei Punkte von $\gamma_1 * \gamma_2$ umlaufen. Außerdem sind sämtliche Nullstellen einfache Nullstellen von $z^6 + 3$, also Pole 1. Ordnung von f . Die Residuen berechnen sich daher zu

$$\operatorname{Res}(f; z_1) = \frac{2}{6z_1^5}, \quad \operatorname{Res}(f; z_2) = \frac{2}{6z_2^5}, \quad \operatorname{Res}(f; z_3) = \frac{2}{6z_3^5}.$$

Ihre Summe beträgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3 \cdot \sqrt[6]{3^5}} \cdot \left(e^{-5\pi i/6} + e^{-15\pi i/6} + e^{-25\pi i/6} \right) = \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[6]{3^5}} \cdot \left(e^{-5\pi i/6} + e^{-\pi i/2} + e^{-\pi i/6} \right) = \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[6]{3^5}} \cdot \left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) - i + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[6]{3^5}} \cdot (-2i). \end{aligned}$$

Man erhält daher

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[6]{3^5}} \cdot (-2i) = \frac{4\pi}{3 \sqrt[6]{3^5}}.$$

Nun fehlt noch die obligatorische Abschätzung für den oberen Integrationsweg. Es gilt für $R > \sqrt[6]{3}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} f(z) \, dz \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{2 \cdot i R e^{it}}{R^6 e^{6it} + 3} \right| dt \stackrel{(\nabla)}{\leq} \int_0^\pi \frac{2R}{\left| |R^6 e^{6it}| - 3 \right|} dt = \\ &= \int_0^\pi \frac{2R}{R^6 - 3} dt = \frac{2\pi R}{R^6 - 3}. \end{aligned}$$

Diese zeigt, dass das Integral entlang γ_2 für $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Jetzt muss nur noch alles zusammen gesetzt werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z) \, dz - \int_{\gamma_2} f(z) \, dz \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt[6]{3}}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T2A2)

a Definiere die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t, x, y) \mapsto (y, -\sin(x)).$$

Diese ist lokal Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Komponente, da

$$\partial_{(x,y)} f(t, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

stetige Einträge hat und deshalb stetig ist. Außerdem gilt für alle $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f(t, x, y)\| &= \|(y, -\sin x)\| \stackrel{(\Delta)}{\leq} \|(y, 0)\| + \|(0, -\sin x)\| = \\ &= \sqrt{y^2} + \sqrt{\sin^2(x)} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = \|(x, y)\| + 1. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f linear beschränkt ist, sodass das gegebene Differentialgleichungssystem eine auf ganz \mathbb{R} definierte eindeutige Lösung $\phi_{z_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zum Anfangswert $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

b Man berechnet

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} \sin x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sei $\phi_{z_0}(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so gilt

$$\frac{d}{dt} F(\phi_{z_0}(t)) = \langle \nabla F(\phi_{z_0}(t)), \phi'_{z_0}(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sin x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ -\sin x(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

c Betrachte die Funktion

$$H: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{2}y^2 - \cos x + 1,$$

wobei die Menge D definiert ist als

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x < \pi \right\}.$$

Diese ist eine Lyapunov-Funktion für die gegebene Differentialgleichung, denn wie in Teil **b** ist $\langle \nabla H(x, y), f(t, x, y) \rangle = 0$ und es gilt

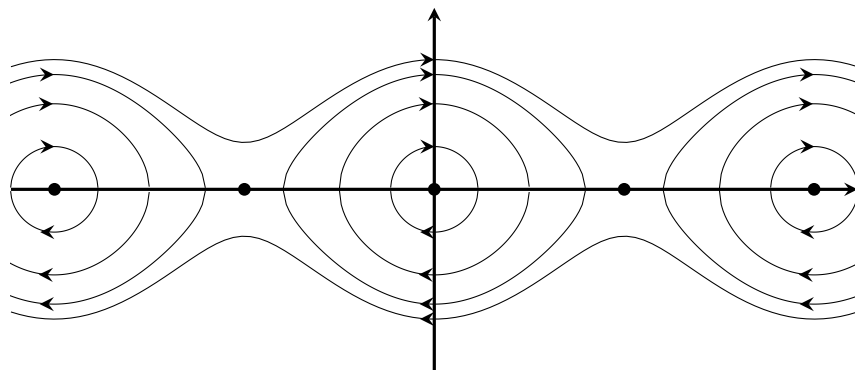
$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x + 1 \geq \frac{1}{2}y^2 - 1 + 1 \geq \frac{1}{2}y^2 \geq 0.$$

Dabei gilt $H(x, y) = 0$ genau dann, wenn $(x, y) = (0, 0)$, denn ist $y \neq 0$, so ist auf jeden Fall $H(x, y) \geq \frac{1}{2}y^2 > 0$, und ist $y = 0$, so ist

$$H(x, 0) = 0 \Leftrightarrow -\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Da wir unsere Betrachtungen auf den Streifen D beschränkt haben, muss in diesem Fall $x = 0$ sein. Insgesamt zeigt dies, dass $(0, 0)$ ein stabiles Gleichgewicht ist. Jedoch kann $(0, 0)$ kein asymptotisch stabiles Gleichgewicht sein, denn für eine Lösung $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$ muss wegen der Stetigkeit von F auch $\lim_{t \rightarrow \infty} F(\lambda(t)) = F(0, 0) = -1$ gelten. Nach Teil **b** ist F konstant entlang jeder Trajektorie, daher kann dies nur erfüllt sein, wenn λ bereits die konstante Nulllösung ist.

Das Phasenportrait sieht folgendermaßen aus:



Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom von A :

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} 1-X & 2 & 3 \\ 4 & 5-X & 6 \\ 7 & 8 & 9-X \end{pmatrix} = -X(X^2 - 15X - 18).$$

Die Eigenwerte von A sind daher 0 und

$$\lambda_{\pm} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 72}}{2} = \frac{15 \pm 3\sqrt{33}}{2}.$$

Dabei ist $\lambda_+ > 0$ und $\lambda_- < 0$. Da $r = (1, -2, 1)$ eine Ruhelage ist, muss dieser Vektor im Kern von A liegen. Außerdem ist A diagonalisierbar, da A drei verschiedene Eigenwerte hat und die algebraische und geometrische Vielfachheit daher beide jeweils 1 sind. Seien v_+ bzw. v_- Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_+ bzw. λ_- , dann haben alle Lösungen der Gleichung $\dot{x} = Ax$ die Form

$$ae^{\lambda_+ t} v_+ + be^{\lambda_- t} v_- + cr$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ist $a \neq 0$, so divergiert die Lösung für $t \rightarrow \infty$. Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_- t} = 0$ konvergieren ansonsten die Lösungen gegen cr . Diejenigen Lösungen, die für $t \rightarrow \infty$ gegen r konvergieren, sind also genau die Lösungen der Form

$$b \cdot e^{\lambda_- t} v_- + r$$

für ein $b \in \mathbb{R}$ und die zugehörigen Anfangswerte für $t = 0$ sind $bv_- + r$. Den Hinweis interpretieren die Autoren so, dass v_- nicht explizit berechnet werden braucht.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T2A4)

- a** *Richtig.* Laut Definition ist eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x, y \in [a, b] \quad \text{mit} \quad |x - y| < \delta.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und nehmen wir widerspruchshalber an, dass kein solches δ existiert. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in [a, b]$ mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{aber} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Wir betrachten im Folgenden die so erhaltenen Punkte als zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Beide Folgen sind beschränkt, da sie im Intervall $[a, b]$ liegen. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß enthält $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (und analog $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$) somit eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ (bzw. $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$), deren Grenzwert wiederum in $[a, b]$ liegen muss, da dieses Intervall abgeschlossen ist. Wir notieren $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \quad \Leftrightarrow \quad x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}.$$

und somit $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x_0$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt nun aber $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(x_0)$. Dies bedeutet aufgrund der Stetigkeit des Betrags

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) \right| = |f(x_0) - f(y_0)| = 0 < \varepsilon,$$

wobei $y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$, und stellt damit einen Widerspruch zur Definition der Folgen x_n und y_n dar. Die Annahme war also falsch und es muss ein δ wie in der Definition existieren.

- b** *Falsch.* Betrachte dazu die Funktion

$$f:]-1, 1[\rightarrow]-1, 1[, \quad x \mapsto x^3 \quad \text{mit} \quad f^{-1}:]-1, 1[\rightarrow]-1, 1[, \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}.$$

Wegen $f'(x) = 3x^2$ ist f zumindest für $x \neq 0$ auf jeden Fall streng monoton steigend. Im Punkt null gilt für beliebig kleines $\varepsilon > 0$, dass $f(-\varepsilon) < 0 < f(\varepsilon)$, sodass auch dort f streng monoton steigend ist. Zudem ist f als Polynom natürlich stetig differenzierbar. Dennoch gilt für die

Folge $h_n = \frac{1}{n^3}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{h_n} - \sqrt[3]{0}}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = n^2 = \infty.$$

Somit ist f^{-1} an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Anmerkung Die Aussage stimmt, wenn man zusätzlich $f'(x) \neq 0$ für $x \in]a, b[$ voraussetzt – dann greift nämlich die Umkehrregel.

c *Richtig.* Unter Verwendung der geometrischen Reihe erhält man für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ die Reihenentwicklung

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Diese Reihe divergiert für $x = 1$, daher beträgt ihr Konvergenzradius genau 1.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T2A5)

a Sei r der Konvergenzradius von f . Da z^{2^n} für $z = 1$ keine Nullfolge ist, muss $r \leq 1$ sein. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ eine Teilreihe der geometrischen Reihe, daher gilt

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n < \infty.$$

Also ist die geometrische Reihe eine konvergente Majorante, sodass $r \geq 1$ folgt. Zusammen ergibt das $r = 1$.

Alternative: Formel von Cauchy-Hadamard.

b Eine kurze Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} f(z^{2^k}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{2^k}\right)^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^k \cdot 2^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^{k+n}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} - \sum_{n=0}^{k-1} z^{2^n} = f(z) - \sum_{n=0}^{k-1} z^{2^n} \end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung ist $|z| < 1$, also auch $|z|^{2^n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält deshalb aus obiger Gleichung unter Verwendung der Dreiecksun-

gleichung die Abschätzung

$$|f(z^{2^k})| \leq |f(z)| + \sum_{n=0}^{k-1} |z|^{2^n} \leq |f(z)| + \sum_{n=0}^{k-1} 1 = |f(z)| + k.$$

c Aufgrund des Ergebnisses aus Teilaufgabe **b** haben wir

$$f(t^{2^k}) = |f((\rho t)^{2^k})| \leq |f(t\rho)| + k$$

für alle $t \in [0, 1]$. Es genügt deshalb zu zeigen, dass $\lim_{t \nearrow 1} f(t) = \infty$. Sei $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben, dann gilt für alle $t \in [0, 1]$ die Abschätzung

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2^n} \geq \sum_{n=0}^{N-1} t^{2^n} \geq \sum_{n=0}^{N-1} t^{2^{N-1}} = Nt^{2^{N-1}}$$

und daher auch

$$\lim_{t \nearrow 1} f(t) \geq \lim_{t \nearrow 1} Nt^{2^{N-1}} = N.$$

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, muss bereits $\lim_{t \nearrow 1} f(t) = \infty$ sein.

d Angenommen, es gibt ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, sodass sich f holomorph auf eine Umgebung U von z fortsetzen lässt. Wir zeigen, dass in jeder Umgebung von z eine 2^k -te Einheitswurzel für ein gewisses $k \in \mathbb{N}$ liegt. Die Behauptung folgt dann aus Teil **c**.

Schreibe $z = e^{i\theta}$ und sei $w = e^{i\varphi} \in U$ mit $z \neq w$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$2^k \cdot \frac{\theta - \varphi}{2\pi} > 2$$

erfüllt ist. Dann gibt es nämlich ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$2^k \frac{\theta}{2\pi} < n < 2^k \frac{\varphi}{2\pi} \Leftrightarrow \theta < \frac{2\pi n}{2^k} < \varphi.$$

Es folgt, dass $\rho = e^{i\frac{2\pi n}{2^k}}$ eine 2^k -te Einheitswurzel in U ist.

Lösungen zu Thema Nr. 3

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T3A1)

a Unter Verwendung der Reihenentwicklung der Sinusfunktion ist

$$f(z) = \sin(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z^{-1})^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Der Hauptteil der Laurentreihenentwicklung von f um 0 bricht also nicht ab, sodass 0 eine wesentliche Singularität von f ist.

b Die Funktion f hat nur die Singularität 0. Wir berechnen zunächst die Windungszahl von γ um 0:

$$\begin{aligned} n(\gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}} \cdot 2ie^{2it} dt = \\ &= \frac{2i}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = \frac{2i}{2\pi} \cdot 2\pi i = 2. \end{aligned}$$

Der Weg γ ist nullhomolog in \mathbb{C} , also können wir den Residuensatz anwenden. Das fehlende Residuum lässt sich an der Laurentreihenentwicklung von f aus Teil **a** ablesen, der Koeffizient vor z^{-1} berechnet sich nämlich mit $k=0$ zu $\text{Res}(f; 0) = (-1)^0 \cdot \frac{1}{(0+1)!} = 1$.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot n(\gamma, 0) \text{Res}(f; 0) = 4\pi i \cdot \text{Res}(f; 0) = 4\pi i.$$

c Nehmen wir an, es gibt eine solche Folge von Polynomen. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt, dass sich Integration und Grenzwertbildung vertauschen lassen:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} p_n(z) dz.$$

Als Polynomfunktion ist jedes p_n holomorph auf \mathbb{C} , sodass nach dem Cauchy-Integralsatz

$$\int_{\gamma} p_n(z) dz = 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit erhalten wir den Widerspruch

$$4\pi i \stackrel{\text{b}}{=} \int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} p_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Die Annahme muss daher falsch gewesen sein.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T3A2)

- a** Die Funktion f ist Quotient zweier Polynomfunktionen, wobei der Nenner im Intervall $[0, \infty[$ nullstellenfrei ist. Deshalb ist f stetig. Da zusätzlich der Grad des Nennerpolynoms um 2 größer ist als der Grad des Zählerpolynoms, ist f integrierbar.
- b** Wir bestimmen zunächst die Singularitäten von f (in \mathbb{C}). Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Nenner, dann gilt

$$z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -1 \Rightarrow |z|^3 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Es gibt also ein $\varphi \in [0, 2\pi[$, sodass $z = e^{i\varphi}$ gilt. Wegen $-1 = e^{i\pi}$ folgt aus

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow z^{3i\varphi} = z^{\pi i} \Leftrightarrow 3i\varphi = \pi i + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

dass die Singularitäten von f durch $z_1 = e^{i\pi/3}$, $z_2 = e^{i\pi} = -1$ und $z_3 = e^{5\pi i/3}$ gegeben sind. Definiere nun für ein $R \in \mathbb{R}^+$ den Weg Γ als Verknüpfung von

$$\begin{aligned} \gamma_1: [0, R] &\rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t, & \gamma_2: [0, \frac{2\pi}{3}] &\rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}, \\ \gamma_3: [0, R] &\rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto (R-t)e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}$$

Der Weg Γ ist nullhomolog in \mathbb{C} und umläuft von den Singularitäten von f nur z_1 einmal. Somit gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f; z_1).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} f(z) dz &= \int_{\gamma_3} \frac{z}{1+z^3} dz = \int_0^R \frac{(R-t)e^{2\pi i/3}}{1+(R-t)^3 e^{2\pi i}} \cdot (-e^{2\pi i/3}) dt = \\ &= -e^{4\pi i/3} \int_0^R \frac{(R-t)}{1+(R-t)^3} dt \stackrel{(*)}{=} -e^{4\pi i/3} \int_R^0 \frac{t}{1+t^3} \cdot (-1) dt = \\ &= -e^{4\pi i/3} \int_0^R \frac{t}{1+t^3} dt = -e^{4\pi i/3} \int_{\gamma_1} \frac{z}{1+z^3} dz = -e^{4\pi i/3} \int_{\gamma_1} f(z) dz, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $(*)$ die Substitution $t \mapsto R-t$ angewendet wurde.

Weiterhin gilt für $R > 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| &\leq \int_0^{2\pi/3} \left| \frac{iR^2 e^{2it}}{1 + R^3 e^{3it}} \right| dt = \int_0^{2\pi/3} \frac{R^2}{|1 + R^3 e^{3it}|} dt \leq \\ &\stackrel{(\nabla)}{\leq} \int_0^{2\pi/3} \frac{R^2}{|1 - R^3|} dt = \frac{2\pi}{3} \frac{R^2}{R^3 - 1} = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{R - \frac{1}{R^2}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

unter Verwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung bei (∇) . Daraus folgt $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$ und somit

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz \right) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_1} f(z) dz + 0 + (-e^{4\pi i/3}) \int_{\gamma_1} f(z) dz \right) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{4\pi i/3}) \int_{\gamma_1} f(z) dz = (1 - e^{4\pi i/3}) \int_0^{\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

Umstellen dieser Gleichung ergibt

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{1 - e^{4\pi i/3}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = \frac{2\pi i \operatorname{Res}(f; z_1)}{1 - e^{4\pi i/3}}.$$

Wir müssen also nur noch $\operatorname{Res}(f; z_1)$ berechnen. Bemerke dazu $\lim_{z \rightarrow z_1} |f(z)| = \infty$ und

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) &= \frac{z_1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} = \frac{e^{i\pi/3}}{(e^{i\pi/3} - e^{i\pi})(e^{i\pi/3} - e^{5i\pi/3})} = \\ &= \frac{e^{i\pi/3}}{e^{2i\pi/3}(1 - e^{2i\pi/3})(1 - e^{4i\pi/3})} = \frac{e^{-i\pi/3}}{1 + 1 - e^{2i\pi/3} - e^{4i\pi/3}} = \\ &= \frac{e^{-i\pi/3}}{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{e^{-i\pi/3}}{2(1 - (\frac{-1}{2}))} = \frac{1}{3} e^{-i\pi/3}. \end{aligned}$$

Somit ist z_1 ein Pol 1. Ordnung von f mit $\operatorname{Res}(f; z_1) = \frac{1}{3} e^{-i\pi/3}$. Schlussendlich:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) dx &= \frac{2\pi i \operatorname{Res}(f; z_1)}{1 - e^{4\pi i/3}} = \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{e^{-\pi i/3}}{1 - e^{4\pi i/3}} = \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{i\pi/3} - e^{5\pi i/3}} = \\ &= \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{i\pi/3} - e^{-\pi i/3}} = \frac{2\pi i}{3 \cdot 2i \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{9} \pi \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T3A3)

- a** Angenommen, es gibt eine solche biholomorphe Abbildung $S \rightarrow \mathbb{C}$. Es wäre dann auch $f^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow S$ holomorph und bijektiv, jedoch liegen beispielsweise $2i$ und $-2i$ nicht in $S = \text{im } f^{-1}$, sodass f^{-1} nach dem Kleinen Satz von Picard konstant sein müsste. Eine konstante Funktion ist aber nicht injektiv und deshalb nicht bijektiv.
- b** Nach dem Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete würde eine solche Funktion f auf dem Rand $\partial B_1(0)$ der Einheitskreisscheibe ein Betragsmaximum annehmen, d. h. es gäbe ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| = 1$ und $|f(z)| \leq |f(z_0)| = 1$ für alle $z \in \overline{B_1(0)}$. Dies verträgt sich jedoch nicht mit $|f(0)| = |2i| = 2 > 1$. Also kann es dieses f nicht geben.
- c** Der Satz von der Gebietstreue stellt sicher, dass $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ wieder offen ist. Es gibt daher $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, sodass die Umgebungen $B_\varepsilon(1)$ und $B_{\varepsilon'}(-1)$ von 1 bzw. -1 in $f(U)$ enthalten sind. Insbesondere gilt

$$-1 - \frac{\varepsilon'}{2} \in B_{\varepsilon'}(-1) \subseteq f(U) \quad \text{und} \quad 1 + \frac{\varepsilon}{2} \in B_\varepsilon(1) \subseteq f(U).$$

Es gibt daher $z, w \in U$ mit

$$f(z) = -1 - \frac{\varepsilon'}{2} < -1 \quad \text{und} \quad f(w) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} > 1.$$

- d** Betrachte die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $z_n = \frac{2}{\pi i + 4\pi i n}$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{z_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\pi i + 4\pi i n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\pi i}{2} + 2\pi i n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\pi i}{2}} = i.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2016, T3A4)

- a** Definiere die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto (x^2 - 1) \sin(t),$$

dann schreibt sich die gegebene Differentialgleichung als $\dot{x} = f(t, x)$. Für die partielle Ableitung von f nach x berechnet man

$$\partial_x f(t, x) = 2x \sin(t).$$

Also ist f auf ganz \mathbb{R} partiell stetig differenzierbar nach x , sodass f dort lokal Lipschitz-stetig bezüglich x ist. Nach dem Globalen Existenz-

und Eindeutigkeitsatz gibt es daher eine eindeutige maximale Lösung $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ von $\dot{x} = f(t, x)$ zum Anfangswert $x(0) = 0$.

Die Differentialgleichung besitzt die konstanten und auf ganz \mathbb{R} definierten Lösungen $t \mapsto 1$ und $t \mapsto -1$. Da sich Lösungskurven maximaler Lösungen nicht schneiden können, folgt aus $-1 < \lambda(0) = 0 < 1$, dass $-1 < \lambda(t) < 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Gäbe es nämlich ein $t_1 \in I$, sodass $\lambda(t_1) > 1$ ist, so müsste es nach dem Zwischenwertsatz auch ein $t_2 \in I$ mit $\lambda(t_2) = 1$ geben. Damit hätten wir aber einen Schnittpunkt der Lösungskurven von λ und $t \mapsto 1$ gefunden, den es nicht geben darf.

Da weiterhin der Rand von \mathbb{R}^2 leer ist und wie gesehen $\lambda(t)$ beschränkt ist, muss λ nach der Charakterisierung des Randverhaltens maximaler Lösungen auf ganz \mathbb{R} definiert sein.

- b** Das Differentialgleichungssystem ist hamiltonsch, wie man sieht, indem man die Integrabilitätsbedingung überprüft:

$$\partial_x(-2y) + \partial_y(2x + 4x^3) = 0$$

Eine Hamilton-Funktion ist dann gegeben durch

$$H(x, y) = \int_0^y -2v \, dv - \int_0^x 2w + 4w^3 \, dw = -y^2 - x^2 - x^4.$$

Die Hamilton-Funktion ist längs jeder Trajektorie des Systems konstant, die Trajektorien sind also Teilmengen der Mengen

$$\begin{aligned} N(\xi) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = H(\xi)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y^2 + x^2 + x^4 = -H(\xi)\} \\ &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq -H(\xi)\} = B_{-H(\xi)}(0). \end{aligned}$$

Damit sind die Trajektorien in der kompakten Menge $B_{-H(\xi)}(0)$ enthalten, bleiben also insbesondere beschränkt. Zusammen mit der Tatsache, dass auch hier der Rand des Definitionsbereiches leer ist, bedeutet dies, dass die zugehörige Lösung auf ganz \mathbb{R} definiert sein muss.

Prüfungstermin: Herbst 2016

Thema Nr. 1 (Aufabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 175

2 + 4 Punkte

- a** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für ein $z_0 \in U$ gelte $|f(z)| \leq |z - z_0|^\alpha$ mit $\alpha > 1$. Zeigen Sie $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) = 0$.
- b** Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $u(z) = x^2 + \lambda y^2$ für $z = x + iy$. Bestimmen Sie alle λ , für die u Realteil einer ganzen Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist. Geben Sie für diese λ alle zugehörigen ganzen Funktionen an.

Aufgabe 2 → S. 176

3 + 3 Punkte

Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f im Komplexen den Typ und berechnen Sie das Integral $\int_{|z|=4} f(z) dz$ für

$$\mathbf{a} \quad f(z) = \frac{\sin(z)}{e^z - e^\pi}, \quad \mathbf{b} \quad f(z) = \sin(e^{1/z}).$$

Aufgabe 3 → S. 178

3 + 3 Punkte

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -\tan(y)e^y, \quad y(0) = -1.$$

- a** Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ hat.
- b** Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$.

Aufgabe 4 → S. 179

1 + 1 + 4 Punkte

Wir betrachten die Funktion

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x \cos(y + x^3) \\ e^x \sin(y + x^3) \end{pmatrix}$$

- a** Zeigen Sie, dass F beliebig oft differenzierbar ist.

- b** Berechnen Sie die Jacobi-Matrix DF .
c Berechnen Sie den Flächeninhalt der Menge

$$\Omega := \{F(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 5 → S. 180

6 Punkte

Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 + 2x^2y - xy^2, \\ y' &= -2x^3 - y^3 + x^2y + 2y^4. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Ruhelagen und untersuchen Sie diese auf ihre Stabilität.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 181

2 + 2 + 2 Punkte

- a** Gegeben sei die Funktion $f(z) = z^2\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die komplexe Ableitung $f'(z)$ existiert.
- b** Die Funktion $h(z) = \frac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(9z^2 + 12z + 4)}$ sei für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert, für die der Nenner nicht verschwindet. Bestimmen Sie für jede Singularität von h (in \mathbb{C}) den Typ.
Ist $z = \infty$ eine Singularität von h ? Falls ja, von welchem Typ?
- c** Sei D das Dreiecksgebiet in der komplexen Ebene, das durch die Punkte $0 + 0i$, $1 + 0i$ und $1 + i$ aufgespannt wird. Sei weiter γ ein Weg, dessen Spur den Rand von D gegen den Uhrzeigersinn einmal durchläuft. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\gamma} |z|^2 dz.$$

Aufgabe 2 → S. 183

2 + 2 + 2 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a** Jede überall partiell differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- b** Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{C} und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und es gebe ein $z_0 \in \Omega$ mit

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \forall z \in \Omega.$$

Dann ist f konstant.

- c** Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ist auf ganz \mathbb{R} differenzierbar.**Aufgabe 3** → S. 184

2 + 4 Punkte

- a** Zeigen Sie, dass für jedes $n = 1, 2, \dots$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n} d\theta = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}.$$

- b** Für jedes $R > 0$ sei der geschlossene Weg $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (der also zuerst γ_1 , dann γ_2 und zuletzt γ_3 durchläuft) definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x, & x &\in [0, R] \\ \gamma_2(\theta) &= Re^{i\theta}, & \theta &\in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \gamma_3(t) &= -te^{i\pi/4}, & t &\in [-R, 0]. \end{aligned}$$

Betrachten Sie das Wegintegral $\int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz$, um zu zeigen, dass die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

gleich sind und den gemeinsamen Wert $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ haben.

Hinweis Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^\infty e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und dass $\sin u \geq \frac{2u}{\pi}$ für alle $0 \leq u \leq \pi/2$ gilt.

Aufgabe 4 → S. 186

2 + 2 + 2 Punkte

Sei auf \mathbb{R}^3 das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben und sei $u(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, $t \in J$ dessen maximale Lösung.

a Man zeige: Die Funktionen

$$E_1(x, y, z) = x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad E_2(x, y, z) = y^2 - z^2$$

sind *erste Integrale* von v . (Ein erstes Integral ist eine Erhaltungsgröße, also eine differenzierbare Funktion E , deren Ableitung längs des Vektorfeldes v verschwindet, d. h. $E'(x, y, z)v(x, y, z) = 0$. Ein erstes Integral ist demnach auf Integralkurven konstant.)

b Man zeige: Für t nahe 0 gilt $\alpha(t) = -\beta(t) = \gamma(t)$.**Hinweis** Es gilt $E_i(u(t)) = E_i(u(0))$ für alle $t, i = 1, 2$.**c** Man bestimme die Lösung $u(t)$ und das maximale Definitionsintervall J .**Aufgabe 5** → S. 187

2 + 2 + 2 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto |\cos x| + t^2$. Man zeige:**a** Es gibt ein Intervall $] -\delta, \delta[$, auf dem das Anfangswertproblem $x' = f(t, x)$, $x(0) = 0$ eine und nur eine Lösung besitzt.**b** Ist $\alpha(t), t \in]a, b[$ mit $a < 0 < b$ eine Lösung des vorstehenden Anfangswertproblems, so ist $\tilde{\alpha}(s) = -\alpha(-s), s \in]-b, -a[$ ebenfalls eine Lösung.**c** Sei $\alpha(t), -\infty \leq t^- < t < t^+ \leq +\infty$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.(i) Es gilt $t^- = -t^+$.**Hinweis** Man verwende **b**.(ii) Es gilt $t^- = -\infty, t^+ = \infty$.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 189

6 Punkte

Seien $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $g \circ f = 0$. Zeigen Sie, dass $g = 0$ oder f konstant ist.

Aufgabe 2 → S. 189

1 + 1 + 2 + 2 Punkte

Es sei $\alpha > 0$ ein gegebener Parameter. Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie:

- a** Jede Funktion f_n ist stetig.
- b** Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.
- c** Falls $\alpha < 1/2$, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig.
Hinweis Es gilt $|\sin z| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{R}$.
- d** Falls $\alpha \geq 1$, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig.

Aufgabe 3 → S. 190

6 Punkte

Sei

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 6\pi\}$$

sowie

$$T := \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : r > 0, -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}\}.$$

Geben Sie ein biholomorphe Abbildung $\varphi: S \rightarrow T$ an mit

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \infty.$$

Aufgabe 4 → S. 191

6 Punkte

Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto f(t, x)$ eine stetige Funktion, die bezüglich der Koordinate x Lipschitz-stetig ist. Zeigen Sie, dass das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = f(t, x)$$

genau dann autonom ist (d. h. $f(t, x)$ ist von t unabhängig), wenn mit jeder Lösung $\varphi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung und jedem $\gamma \in \mathbb{R}$ auch $\varphi_\gamma:]a - \gamma, b - \gamma[\rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi_\gamma(t) = \varphi(t + \gamma)$, eine Lösung ist.

Aufgabe 5 → S. 192

2 + 1 + 3 Punkte

a Gegeben sei ein autonomes Differentialgleichungssystem $\dot{x} = f(x)$ mit einer stetig differenzierbaren Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die $f(0) = 0$ erfüllt.

- (i) Definieren Sie den Begriff der asymptotischen Stabilität der stationären Lösung 0 des Systems.
- (ii) Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität der stationären Lösung 0 an, welches die totale Ableitung $Df(0)$ von f in 0 verwendet.

b Prüfen Sie, ob die stationäre Lösung 0 des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2 + \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2(1 - e^{x_1}) - 3x_2 + x_1 x_2^2 \end{aligned}$$

asymptotisch stabil ist.

Lösungen zu Thema Nr. 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T1A1)

- a** Einsetzen von $z = z_0$ in die Voraussetzung ergibt sofort $|f(z_0)| \leq 0$, also $f(z_0) = 0$.

Entwickeln wir f in einer Umgebung von z_0 in eine konvergente Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, so ist $a_0 = f(z_0) = 0$. Sei $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-1}$, dann haben wir $f(z) = (z - z_0)h(z)$ und für alle $z \neq z_0$ gilt

$$|f(z)| = |(z - z_0)h(z)| \leq |z - z_0|^\alpha \Leftrightarrow |h(z)| \leq |z - z_0|^{\alpha-1}.$$

Da h als holomorphe Funktion stetig ist, folgt (beachte $\alpha - 1 > 0$)

$$|h(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} |h(z)| \leq \lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^{\alpha-1} = 0,$$

also ist $h(z_0) = 0$. Wegen $f'(z_0) = a_1 = h(z_0) = 0$ ist damit der Aufgabenstellung Genüge getan.

- b** Wir bestimmen λ so, dass u eine harmonische Funktion ist und berechnen zunächst

$$\partial_x^2 u(x + iy) = \partial_x(2x) = 2, \quad \partial_y^2 u(x + iy) = \partial_y(2\lambda y) = 2\lambda.$$

Daraus folgt für $x + iy \in \mathbb{C}$

$$(\Delta u)(x + iy) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Im Fall $\lambda = -1$ ist u also der Realteil einer ganzen Funktion f .

Den zugehörigen Imaginärteil v bestimmen wir wie auf Seite 273 beschrieben. Es muss aufgrund der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten:

$$\partial_y v(x + iy) = \partial_x u(x + iy) = 2x \quad \text{und} \quad \partial_x v(x + iy) = -\partial_y u(x + iy) = 2y.$$

Durch Integration der zweiten Gleichung nach x erhalten wir

$$v(x, y) = 2xy + v(x, 0)$$

und Integration nach y liefert

$$v(x, y) = 2xy + v(0, y).$$

Wertet man die erste Gleichung bei $(0, y)$ aus, so erhält man

$$v(x, y) = 2xy + v(0, 0).$$

Schreibe $c = v(0, 0)$, so ist für $z = x + iy$

$$f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + c) = x^2 + 2ixy + i^2y^2 + ic = (x + iy)^2 + ic = z^2 + ic.$$

Umgekehrt ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Funktion dieser Form holomorph und hat u als Realteil.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T1A2)

a Die Nullstellen des Nenners haben die Form $z_k = \pi + 2k\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}$. Keine dieser Nullstellen ist doppelt, da die Nennerableitung durch e^z gegeben ist und $e^{z_k} = e^\pi \neq 0$. Somit lässt sich der Nenner von f schreiben als $(z - z_k)g_k(z)$ für eine holomorphe Abbildung g_k mit $g_k(z_k) \neq 0$.

Betrachten wir zuerst $k \neq 0$: Wegen $\sin(z_k) \neq 0$ lässt sich f als $f(z) = (z - z_k)^{-1} \frac{\sin z}{g_k(z)}$ schreiben, wobei der zweite Faktor holomorph ist und nicht verschwindet. Also ist $\pi + 2k\pi i$ eine Polstelle erster Ordnung ist.

Im Fall $k = 0$ beachte, dass $\sin(\pi) = 0$, aber $\sin'(\pi) = \cos \pi \neq 0$, sodass der Zähler eine Darstellung der Form $\sin(z) = (z - \pi)h(z)$ für eine holomorphe Funktion h mit $h(\pi) \neq 0$ hat. Damit erhalten wir aber analog zu eben für $z \neq \pi$

$$f(z) = \frac{(z - \pi)h(z)}{(z - \pi)g_0(z)} = \frac{h(z)}{g(z)}.$$

Der Quotient $\frac{h}{g}$ ist holomorph auf $B_{2\pi}(\pi)$, sodass die Singularität π hebbbar ist.

Zur Berechnung des Integrals: es gilt $\text{Res}(f; \pi) = 0$, da π eine hebbare Singularität ist. Die restlichen Singularitäten liegen nicht im Integrationsbereich, da für $k \neq 0$

$$|\pi + 2k\pi i| \geq |\text{Im}(\pi + 2k\pi i)| = |2k\pi| > 4$$

gilt. Somit ist $\int_{|z|=4} f dz = 0$.

b Die einzige Singularität der Funktion ist 0. Betrachten wir zunächst das Argument der Sinusfunktion. Hier gilt

$$e^{1/z} = e^{z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}.$$

Da in dieser Reihenentwicklung um 0 unendlich viele Glieder mit negativem Exponenten auftreten, handelt es sich bei 0 um eine wesentliche Singularität. Laut dem Satz von Casorati-Weierstraß ist das Bild einer beliebig kleinen punktierten Umgebung von 0 unter $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$ daher dicht in \mathbb{C} und es muss Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geben, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{v_n}\right) = \pi.$$

Für diese Folgen gilt nun aufgrund der Stetigkeit der Sinusfunktion

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = \sin \pi = 0.$$

Damit ist auch die Singularität 0 der Funktion f wesentlich. Wir berechnen das Residuum, indem wir die Reihendarstellung von f betrachten:

$$f(z) = \sin\left(e^{\frac{1}{z}}\right) = \sin\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{-l}}{l!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{-l}}{l!}\right)^{2k+1}$$

Wir zeigen zunächst, dass der Koeffizient vor z^{-1} in der Reihe $\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{-l}}{l!}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ gleich n ist. Für $n = 1$ ist dies klar. Setzen wir die Aussage für n als gültig voraus. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{-l}}{l!}\right)^{n+1} &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{-l}}{l!}\right)^n \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{-l}}{l!}\right) = \\ &= (1 + nz^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots)(1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \dots) = \\ &= 1 + (n+1)z^{-1} + \dots \end{aligned}$$

und somit ist die Aussage auch für $n+1$ wahr. Wir erhalten daher:

$$\text{Res}(f; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \cos 1.$$

Damit berechnet sich das gesuchte Integral mit dem Residuensatz zu

$$\int_{|z|=4} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0) = 2\pi i \cos 1.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T1A3)

- a** Sei $D = \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ der Definitionsbereich der Gleichung. Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = -\tan(y)e^y$ ist wegen

$$\partial_y f(x, y) = \frac{-e^y}{\cos^2 y} - \tan(y)e^y$$

auf ganz D stetig differenzierbar und somit lokal Lipschitz-stetig. Da D ein Gebiet ist, folgt aus dem Globalen Existenz- und Eindeigkeitssatz, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung y auf einem Intervall $I =]a, b[$ mit $0 \in I$ besitzt.

Um zu zeigen, dass diese maximale Lösung auf ganz \mathbb{R} definiert ist, zeigen wir, dass die Lösung des Anfangswertproblems beschränkt bleibt: Angenommen, es gibt ein $x_0 \in I$ mit $y(x_0) > 0$. Laut dem Zwischenwertsatz gibt es wegen $y(0) = -1 < 0$ ein $x_1 \in]0, x_0[$ mit $y(x_1) = 0$. Damit sind aber sowohl die Abbildung y als auch die Nullfunktion $t \mapsto 0$ Lösungen der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $y(x_0) = 0$. Da die Nullfunktion auf ganz \mathbb{R} definiert ist, ist sie die maximale Lösung dieses Anfangswertproblems, sodass y eine Einschränkung Nullfunktion sein muss. Insbesondere ist y konstant – jedoch kann y wegen $y(0) \neq 0$ nicht die Nulllösung sein. Widerspruch.

Damit haben wir $y(x) < 0$ für $x \in I$. Wegen $f(x, y) > 0$ für $(x, y) \in \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ist y streng monoton steigend, insbesondere ist also $y(x) \in]-1, 0[$ für alle $x \in [0, b[$. Folglich sind $\lim_{x \nearrow b} \operatorname{dist}((x, y(x)), \partial D) = 0$ und $\lim_{x \nearrow b} |y(x)| = \infty$ unmöglich. Laut der Charakterisierung des Randverhaltens maximaler Lösungen muss deshalb $b = \infty$ gelten.

- b** Die Lösung $y(x)$ ist durch 0 nach oben beschränkt und monoton wachsend, damit existiert der Limes und erfüllt $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) \leq 0$. Nehmen wir widerspruchshalber an, es gibt eine kleinere obere Schranke $c < 0$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}_+$

$$y'(x) = -e^{y(x)} \tan y(x) > -e^c \tan c > 0.$$

Dies bedeutet jedoch

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'(t) dt \geq -1 + \int_0^x -e^c \tan c dt = -1 - xe^c \tan c \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

im Widerspruch dazu, dass y nach oben beschränkt ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T1A4)

a Die Komponentenfunktionen von F entstehen durch punktweise Addition und Multiplikation der beliebig oft differenzierbaren Abbildungen $(x, y) \mapsto x$ bzw. $(x, y) \mapsto y$ sowie durch Verkettung mit Exponential- bzw. Sinus-/ Kosinusfunktion, die ebenfalls beliebig oft differenzierbar sind. Also sind die Komponenten und damit auch die Funktion F selbst beliebig oft differenzierbar.

b Es gilt

$$(DF)(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y + x^3) - 3e^x \sin(y + x^3)x^2 & -e^x \sin(y + x^3) \\ e^x \sin(y + x^3) + 3e^x \cos(y + x^3)x^2 & e^x \cos(y + x^3) \end{pmatrix}.$$

c Sei $\Delta = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Es gilt $\Omega = F(\Delta)$. Außerdem ist $F|_{\Delta}$ injektiv, denn aus $F(x, y) = F(x', y')$ folgt wegen $e^x = |F(x, y)| = |F(x', y')| = e^{x'}$ sofort $x = x'$. Die Bedingung $\cos(y + x^3) = \cos(y' + x'^3)$ liefert weiter

$$y \equiv y' \pmod{2\pi}$$

und aufgrund der Definition von Δ bedeutet dies $y = y'$. Mit dem Transformationssatz erhalten wir damit

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, d(x, y) = \int_{\Delta} |\det(DF)(x, y)| \, d(x, y).$$

Als Vorbereitung berechnet man in einer nicht allzu aufwendigen Rechnung

$$|\det(DF)(x, y)| = e^{2x}.$$

Nun gilt $(x, y) \in \Delta$ genau dann, wenn $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq x$ ist, also

$$\int_{\Delta} |\det DF(x, y)| \, d(x, y) = \int_0^1 \int_0^x e^{2x} \, dy \, dx = \int_0^1 [ye^{2x}]_{y=0}^{y=x} \, dx = \int_0^1 xe^{2x} \, dx.$$

Mittels partieller Integration erhalten wir schlussendlich

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2}xe^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}e^{2x} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T1A5)

Wir lösen zunächst

$$\begin{aligned}-x^3 + 2x^2y - xy^2 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x(x^2 - 2xy + y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -x(x - y)^2 = 0.\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir $x = 0$ oder $x = y$. Im ersten Fall liefert die zweite Gleichung

$$-y^3 + 2y^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^3(2y - 1) = 0.$$

Wir erhalten die Ruhelagen $(0, 0)$ und $(0, \frac{1}{2})$. Im zweiten Fall erhalten wir

$$-2x^3 - x^3 + x^3 + 2x^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3(x - 1) = 0$$

und somit erneut $(0, 0)$ oder $(1, 1)$. Tatsächlich zeigt Einsetzen, dass $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ und $(1, 1)$ Ruhelagen des Systems sind.

Um diese auf Stabilität zu untersuchen, versuchen wir zunächst Linearisierung. Bezeichnet f die Funktion der rechten Seite, so erhalten wir

$$(Df)(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 + 4xy - y^2 & 2x^2 - 2xy \\ -6x^2 + 2xy & -3y^2 + x^2 + 8y^3 \end{pmatrix}.$$

Für $(0, \frac{1}{2})$ ergibt sich

$$(Df)\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

woran wir sofort ablesen können, dass einer der Eigenwerte positiv, die Ruhelage also nach dem Kriterium für linearisierte Stabilität 7.30 instabil ist. Für die Stelle $(1, 1)$ ergibt sich

$$(Df)(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Für diese berechnet man leicht die Eigenwerte 0 und 6. Da letzterer einen positiven Realteil hat, ist wie zuvor auch die Ruhelage $(1, 1)$ instabil.

Da $(Df)(0, 0)$ die Nullmatrix ist, liefert Linearisierung hier keine Aussage. Wir machen folgenden Versuch: Es gilt für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 + 2x^2y - xy^2 \\ -2x^3 - y^3 + x^2y + 2y^4 \end{pmatrix} \right\rangle = -x^4 + 2x^3y - x^2y^2 - 2x^3y - y^4 + x^2y^2 + 2y^5 = -x^4 - y^4 + 2y^5.$$

Der letzte Term ist leider nicht auf ganz \mathbb{R}^2 negativ. Betrachten wir daher die Einschränkung des Systems auf die Menge $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \frac{1}{2}\}$. Für $(x, y) \in D$ mit $y \neq 0$ gilt nun

$$y < \frac{1}{2} \Rightarrow 2y^5 < y^4 \Rightarrow -y^4 + 2y^5 < 0 \Rightarrow -x^4 - y^4 + 2y^5 < 0.$$

Im Fall $y = 0$ gilt zumindest, falls $x \neq 0$, dass $-x^4 < 0$. Somit haben wir

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 + 2x^2y - xy^2 \\ -2x^3 - y^3 + x^2y + 2y^4 \end{pmatrix} \right\rangle < 0$$

für alle $(x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}$ gezeigt. Nun ist (x, y) gerade der Gradient der Funktion $V: D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Bei V handelt es sich also um eine Lyapunov-Funktion für das auf D eingeschränkte System. Es gilt ferner $V(0, 0) = 0$ und $V(x, y) > 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$. Gemäß der direkten Methode von Lyapunov ist die Ruhelage $(0, 0)$ des auf D eingeschränkten Systems also asymptotisch stabil. Das trifft dann auch auf die entsprechende Ruhelage des auf \mathbb{R}^2 definierten Systems zu.

Lösungen zu Thema Nr. 2

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T2A1)

a Es ist für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$f(z) = (x + iy)^2(x - iy) = (x + iy)(x^2 + y^2) = x^3 + xy^2 + i(x^2y + y^3).$$

Da f reell analytisch ist, ist f genau dann in z holomorph, wenn dort die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten:

$$\partial_x \operatorname{Re} f(z) = \partial_y \operatorname{Im} f(z) \Leftrightarrow 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

sowie

$$\partial_y \operatorname{Re} f(z) = -\partial_x \operatorname{Im} f(z) \Leftrightarrow 2xy = -2xy \Leftrightarrow xy = 0.$$

Die zweite Gleichung liefert $x = 0$ oder $y = 0$, zusammen mit der ersten Gleichung folgt in jedem Fall $z = 0$. Da für $x = y = 0$ andererseits beide Gleichungen erfüllt sind, ist die Funktion genau im Ursprung holomorph.

b Aufgrund von

$$(z-1)^3(9z^2 + 12z^2 + 4) = (z-1)^3(3z+2)^2$$

hat der Nenner von h die Nullstellen 1 und $-\frac{2}{3}$. Wir erhalten zunächst

$$h(z) = (z-1)^{-3}g_1(z) \quad \text{mit } g_1(z) = \frac{z^8 + z^4 + 2}{(3z+2)^2}.$$

Die Funktion g_1 ist holomorph auf einer Umgebung von 1, ferner gilt $g_1(1) \neq 0$. Somit ist 1 eine Polstelle dritter Ordnung. Analog gilt

$$h(z) = \frac{1}{9} \left(z + \frac{2}{3}\right)^{-2} g_2(z) \quad \text{mit } g_2(z) = \frac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3}.$$

Auch hier ist g_2 holomorph auf einer Umgebung von $-\frac{2}{3}$ und es gilt $g_2(-\frac{2}{3}) \neq 0$. Damit ist $-\frac{2}{3}$ eine Polstelle zweiter Ordnung.

Zur Untersuchung des Punktes ∞ betrachten wir die Funktion $h(\frac{1}{z})$. Es ist für $z \neq 0$

$$h\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^{-8} + z^{-4} + 2}{(\frac{1}{z} - 1)^3(\frac{3}{z} - 2)^2} = \frac{1 + z^4 + 2z^8}{z^3(1-z)^3(3-2z)^2}.$$

Wiederum gilt hier

$$h\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-3} \frac{1 + z^4 + 2z^8}{(1-z)^3(3-2z)^2}$$

und der hintere Faktor ist auf einer Umgebung der 0 holomorph und verschwindet in 0 nicht. Somit ist 0 eine Polstelle dritter Ordnung von $h(\frac{1}{z})$ und dasselbe gilt für die Singularität ∞ von h .

c Wir bemerken, dass der Integrand nicht holomorph ist und Integralsätze hier keine große Hilfe sind. Wir berechnen das Integral zu Fuß: γ ist die Verknüpfung der Wege

$$\gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = 1 + it, \quad \gamma_3(t) = (1-t)(1+i),$$

wobei jeweils $t \in [0, 1]$ ist.

Mit $\gamma_1'(t) = 1$ gilt zunächst

$$\int_{\gamma_1} |z|^2 dz = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Ferner ist für $\gamma_2'(t) = i$, also

$$\int_{\gamma_2} |z|^2 dz = \int_0^1 (1 + t^2) i dt = i \left[t + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3} i.$$

Zu guter Letzt ist noch für $\gamma_3'(t) = -1 - i$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} |z|^2 dz &= (-1 - i) \int_0^1 (1 - t)^2 + (1 - t)^2 dt = \\ &= (-2 - 2i) \int_0^1 (1 - t)^2 dt = (-2 - 2i) \left[-\frac{1}{3} (1 - t)^3 \right]_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} i \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\gamma} |z|^2 dz = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} i - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} i = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} i.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T2A2)

a *Falsch.* Betrachte die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Diese ist überall partiell differenzierbar. In Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ folgt dies aus der totalen Differenzierbarkeit aufgrund des Quotientenkriteriums. Im Punkt $(0, 0)$ betrachten wir zunächst die Ableitung in x -Richtung. Hier gilt

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Für die y -Richtung erhalten wir

$$\partial_y f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Insbesondere existieren beide partiellen Ableitungen auch in $(0,0)$. Zum Nachweis der Unstetigkeit definiere die Folge $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)\right).$$

- b** *Falsch.* Die Aussage wäre richtig, falls f nullstellenfrei ist (vgl. Minimumprinzip). Da dies nicht vorausgesetzt war, definieren wir auf dem Gebiet $\Omega = B_1(0)$ die Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$. Diese Funktion ist holomorph. Zugleich gilt natürlich für $z_0 = 0$

$$|f(z_0)| = 0 \leq |f(z)| \quad \forall z \in \Omega.$$

Andererseits ist aber f wegen $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \neq 0 = f(0)$ nicht konstant.

- c** *Wahr.* Die Bereiche $x \neq 0$ sind uninteressant, da dort die Differenzierbarkeit aus der Produkt-/ Ketten- bzw. Quotientenregel folgt. Betrachten wir den Fall $x = 0$. Wir berechnen

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} h \sin(1/h) = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit aus $\sin(1/h) \in [-1, 1]$ für alle $h \in \mathbb{R}$ folgt. Fazit: Die Funktion f ist an der Stelle 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T2A3)

- a** Wegen $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ gilt

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{-i\theta} \right)^{2n} d\theta.$$

Bezeichnet nun γ den Weg $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$, so wird das Integral zu

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} \right)^{2n} \frac{\gamma'(t)}{ie^{it}} dt = \frac{1}{i2^{2n}} \int_{\gamma} \frac{1}{z} (z + z^{-1})^{2n} dz.$$

Der Integrand, den wir im Folgenden als $f(z)$ bezeichnen, hat nur eine Singularität bei 0. Wir berechnen das zugehörige Residuum. Der binomische Lehrsatz liefert zunächst

$$f(z) = \frac{1}{z}(z + z^{-1})^{2n} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k z^{-2n+k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2k-2n-1}.$$

Der Koeffizient von z^{-1} ergibt sich für $k = n$ und es ist dementsprechend

$$\operatorname{Res}(f; 0) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Damit ist der Wert des Integrals laut Residuensatz

$$\frac{1}{i2^{2n}} \int_{\gamma} z (z + z^{-1})^{2n} dt = \frac{1}{i2^{2n}} \cdot 2\pi i \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}.$$

b Wir betrachten zunächst die Integrale getrennt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz &= \int_{-R}^0 e^{i(-t)^2 e^{i\pi/2}} (-e^{i\pi/4}) dt = -e^{i\pi/4} \int_{-R}^0 e^{-t^2} dt = \\ &= -e^{i\pi/4} \int_R^0 (-1) e^{-t^2} dt = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Dabei erhält man die vorletzte Gleichung durch die Substitution $t \mapsto -t$.
Ferner ist für $R > 0$ mit der Ungleichung aus dem Hinweis

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz \right| &\leq \int_0^{\pi/4} \left| e^{iR^2 e^{2i\theta}} \right| \cdot |iRe^{i\theta}| d\theta = \int_0^{\pi/4} R e^{\operatorname{Re}(iR^2 e^{2i\theta})} d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/4} R e^{-R^2 \sin(2\theta)} d\theta \leq \int_0^{\pi/4} R e^{-\frac{4R^2\theta}{\pi}} d\theta \\ &= \left[-\frac{\pi R}{4R^2} e^{-\frac{4R^2\theta}{\pi}} \right]_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{4R} e^{-R^2} + \frac{\pi}{4R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Laut dem Cauchy-Integralsatz verschwindet das Integral $\int_{\gamma} e^{iz^2} dz$, da der Integrand holomorph auf \mathbb{C} ist. Damit erhalten wir

$$0 = \int_{\gamma_1} e^{iz^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz.$$

Und da das Integral über γ_2 beim Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ verschwindet, ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} e^{iz^2} dz = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz.$$

Weiter erhalten wir wegen $e^{ix^2} = \cos(x^2) + i \sin(x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$ unter Verwendung des Integrals aus der Angabe

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx = e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert dann

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \sin(x^2) dx.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T2A4)

a Man berechnet für $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\langle \nabla(E_1)(x, y, z), v(x, y, z) \rangle = (2x \quad -2y \quad 0) \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} = 0,$$

$$\langle (\nabla E_2)(x, y, z), v(x, y, z) \rangle = (0 \quad 2y \quad -2z) \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} = 0.$$

b Dem Hinweis folgend bemerkt man zuerst $E_1(u(0)) = E_1(1, -1, 1) = 0 = E_2(1, -1, 1) = E_2(u(0))$. Dementsprechend folgt

$$\alpha^2(t) - \beta^2(t) = 0 = \beta^2(t) - \gamma^2(t).$$

Damit muss $\alpha(t) = \pm\beta(t)$ und $\beta(t) = \pm\gamma(t)$ sein. Im Punkt $t = 0$ gilt $\alpha(0) = -\beta(0) = \gamma(0)$ aufgrund der Anfangsbedingung. Wir zeigen nun, dass es eine Umgebung der 0 gibt, in der $\alpha(t) = -\beta(t)$ gilt. Der Nachweis von $-\beta(t) = \gamma(t)$ kann analog geführt werden. Die Gleichheit $\alpha(t) = -\beta(t) = \gamma(t)$ gilt dann im Schnitt dieser beiden Umgebungen.

Da α und β stetig sind, gibt es nach dem ε - δ -Kriterium zu jedem $\varepsilon > 0$ jeweils $\delta_1, \delta_2 > 0$, sodass für alle $|t| < \delta_1$ bzw. $|t| < \delta_2$ die Ungleichungen

$$|\alpha(0) - \alpha(t)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |\beta(0) - \beta(t)| < \varepsilon$$

erfüllt sind. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dann sind für $|t| < \delta$ beide Ungleichungen erfüllt. Nehmen wir an, es gibt ein solches $t \in]-\delta, \delta[$ mit

$\alpha(t) = \beta(t)$, dann gilt

$$|\beta(0) - \beta(t)| = |-1 - \alpha(t)| = |1 + \alpha(t)| < \frac{1}{2}.$$

Dies widerspricht jedoch $|\alpha(0) - \alpha(t)| = |1 - \alpha(t)| < \frac{1}{2}$. Für alle $t \in]-\delta, \delta[$ muss daher $\alpha(t) = -\beta(t)$ erfüllt sein.

c Schränken wir die Differentialgleichung auf die Umgebung aus Teil **b** ein, so gilt dort

$$\alpha'(t) = \beta(t) \cdot \gamma(t) = -\alpha^2(t),$$

d. h. α ist Lösung der Differentialgleichung $x' = -x^2$ zum Anfangswert $x(0) = 1$. Diese Differentialgleichung lösen wir mittels Trennen der Variablen:

$$\int_1^{\alpha(t)} \frac{-1}{x^2} dx = \int_0^t 1 d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(t)} - 1 = t \Leftrightarrow \alpha(t) = \frac{1}{t+1}.$$

Unser Lösungskandidat ist daher

$$u(t) = \frac{1}{t+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und man überprüft, dass u tatsächlich die Differentialgleichung löst. Das maximale Definitionsintervall ist $J =]-1, \infty[$. Wegen

$$\lim_{t \searrow -1} \|u(t)\| = \infty$$

kann u auch nicht stetig über dieses Intervall hinaus fortgesetzt werden.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T2A5)

a Der Definitionsbereich der Gleichung ist ein Gebiet, die rechte Seite ist stetig. Wir zeigen, dass f sogar Lipschitz-stetig bezüglich x ist. Seien dazu $(t, x), (t, y) \in \mathbb{R}^2$, wobei wir o. B. d. A. $x < y$ annehmen. Es gilt

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left| |\cos x| - |\cos y| \right| \stackrel{(\nabla)}{\leq} |\cos x - \cos y|.$$

Laut dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert nun ein $x_0 \in$

$]x, y[$, sodass

$$\frac{\cos x - \cos y}{x - y} = \cos'(x_0) = -\sin(x_0) \Leftrightarrow \cos x - \cos y = -\sin(x_0)(x - y)$$

und damit

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq |\cos x - \cos y| = |\sin(x_0)| \cdot |x - y| \leq |x - y|$$

gilt. Damit ist f (sogar global) Lipschitz-stetig bezüglich x mit Lipschitz-Konstante 1. Laut dem Globalen Existenz- und Eindeigkeitsatz 7.12 existiert damit ein Intervall $]-\delta, \delta[$, sodass das angegebene Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt.

b Es gilt für $s \in]-b, -a[$ unter Verwendung der Achsensymmetrie des Kosinus:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(s) &= \alpha'(-s) = f(-s, \alpha(-s)) = |\cos \alpha(-s)| + (-s)^2 = \\ &= |\cos(-\alpha(-s))| + s^2 = |\cos(\tilde{\alpha}(s))| + s^2 = f(s, \tilde{\alpha}(s)). \end{aligned}$$

Zudem ist $\tilde{\alpha}(0) = -\alpha(0) = 0$, also ist auch die Anfangsbedingung erfüllt.

Anmerkung Laut Teil **a** folgt mit der Eindeutigkeit der (maximalen) Lösung, dass $\alpha(s) = -\alpha(-s)$ für $s \in]a, b[$ gilt – wir haben soeben also gezeigt, dass die Lösung des Anfangswertproblems punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

c (i) In Teil **b** hatten wir gesehen, dass das Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist. Nun folgt daraus aber, wie eben bemerkt, $\alpha = \tilde{\alpha}$. Damit ist insbesondere $]-t^+, -t^- [=]t^-, t^+[$ und daraus folgt die Behauptung.

(ii) Wir folgen dem Vorgehen von Seite 413 und erhalten für $s \in]t^-, t^+[$

$$\begin{aligned} |\alpha(s) - \alpha(0)| &= \left| \int_0^s f(t, \alpha(t)) dt \right| = \left| \int_0^s |\cos \alpha(t)| + t^2 dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^s 1 + t^2 dt = \left[t + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^s = s + \frac{1}{3}s^3. \end{aligned}$$

Umformuliert ergibt dies mit $\alpha(0) = 0$

$$-s - \frac{1}{3}s^3 \leq \alpha(s) \leq s + \frac{1}{3}s^3.$$

Nun ist der Rand des Definitionsbereichs der Gleichung leer, und wegen der Abschätzung ist $\lim_{s \rightarrow t^+} \alpha(s)$ endlich, falls t^+ endlich wäre. Damit bleibt gemäß der Charakterisierung maximaler Lösungen nur der Fall $t^+ = \infty$, und damit laut Teil (i) auch $t^- = -\infty$, übrig.

Lösungen zu Thema Nr. 3

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T3A1)

Sei f nicht-konstant, dann ist $U = f(C)$ nach dem Satz über die Gebietstreue 6.22 ein Gebiet. Laut Voraussetzung stimmt also $g|_U$ mit der Nullfunktion überein. Nach dem Identitätssatz muss daher g bereits selbst die Nullfunktion sein.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T3A2)

- a** Sei $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Auf der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f_n definiert durch $x \mapsto \frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx}$ und somit als punktweise Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig. Betrachten wir noch $x = 0$. Hier gilt unter Verwendung der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(n^\alpha x) \cos(n^\alpha x) n^\alpha}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Zusammen mit $f_n(0) = 0$ ergibt sich $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = f_n(0)$.

- b** Im Fall $x = 0$ ist wegen $f_n(0) = 0$ die Behauptung klar. Sei also $x \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{nx} \right| = 0$$

und damit auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Damit konvergiert die Funktionenfolge punktweise gegen die Nullfunktion.

- c** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ und für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|f_n(x)| < \varepsilon$ erfüllt ist. Wiederum ist dies im Fall $x = 0$ wegen $f_n(0) = 0$ klar. Für $x \neq 0$ treffen wir die Abschätzung

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(n^\alpha x) \sin(n^\alpha x)}{nx} \right| \stackrel{(*)}{\leq} \left| \frac{1 \cdot n^\alpha x}{nx} \right| = n^{\alpha-1} = \frac{1}{n^{1-\alpha}} < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Dabei haben wir an der Stelle $(*)$ den Hinweis aus der Aufgabenstellung verwendet. Setzen wir nun $N = \frac{1}{\varepsilon^2}$, so folgt aus $n \geq N$ für alle $x \neq 0$

$$|f_n(x)| < \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} = \varepsilon.$$

d Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Würde f_n gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergieren, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|f_n(x)| < 1$ für $n \geq N$ und $x \in \mathbb{R}$. Für ein genügend großes $n \geq N$ gilt $x_0 = \frac{\pi}{2N^\alpha} \in]0, 1[$. Es gilt

$$f_n(x_0) = \frac{\sin^2(N^\alpha x_0)}{N x_0} = \frac{\sin^2\left(\frac{N^\alpha \pi}{2N^\alpha}\right)}{\frac{\pi N}{2N^\alpha}} = \frac{2N^\alpha}{\pi N}.$$

Daraus folgt jedoch wegen $\alpha - 1 \geq 0$ für alle $n \geq N$ die Abschätzung

$$f_n(x_0) = \frac{2}{\pi} N^{\alpha-1} \geq \frac{2}{\pi} N^0 > \frac{2}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

im Widerspruch zur Wahl von ε .

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T3A3)

Die wesentliche Idee liegt hier in der Nutzung der komplexen Exponentialfunktion. Diese bildet nämlich (wie wir später zeigen werden) den Streifen $U = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\}$ auf die gewünschte Menge ab. Deshalb definieren wir zunächst $\psi_1: S \mapsto U, z \mapsto \frac{1}{12}z - \frac{i\pi}{4}$. Offensichtlich ist ψ_1 biholomorph. Tatsächlich bildet ψ_1 die Menge S auf U ab: Ist nämlich $z \in S$, so gilt

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{Im} z < 6\pi &\Leftrightarrow -3\pi < \operatorname{Im}(z - 3i\pi) < 3\pi \\ -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im}\left(\frac{1}{12}z - \frac{i\pi}{4}\right) < \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $\psi_2: U \rightarrow T, z \mapsto e^z$ eine biholomorphe Abbildung ist. Sei $z \in U$, dann gilt

$$\psi_2(z) = e^{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z} = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} \in T$$

und somit $\psi_2(U) \subseteq T$. Es ist bekannt, dass die Exponentialfunktion holomorph ist. Zum Nachweis der Injektivität seien $z_1, z_2 \in U$ mit $e^{z_1} = e^{z_2}$. Es folgt $z_1 = z_2 + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2 < \frac{\pi}{4}$ muss aber bereits $k = 0$ und somit $z_1 = z_2$ gelten. Zum Nachweis der Surjektivität sei $z \in T$, also $z = r e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$. Es gilt dann $\ln r + i\varphi \in U$ und

$$e^{\ln r + i\varphi} = z.$$

Insgesamt ist damit ψ_2 eine biholomorphe Abbildung wie behauptet und wir erhalten mit $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ die biholomorphe Abbildung

$$\varphi: S \rightarrow T, \quad z \mapsto e^{\frac{1}{12}z - \frac{i\pi}{4}}.$$

Zudem gilt

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \infty} |\varphi(z)| = \lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \infty} e^{\operatorname{Re}(\frac{1}{12}z - \frac{i\pi}{4})} = \lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{12} \operatorname{Re} z} = \infty$$

und somit ist der geforderte Grenzwert auch erfüllt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T3A4)

„ \Rightarrow “: Nehmen wir an, dass die Gleichung autonom ist. Dann ist $f(t, x) = f(t + \gamma, x)$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Sei ferner φ eine Lösung und φ_γ wie in der Angabe. Dann gilt für $t \in]a - \gamma, b - \gamma[$, dass $t + \gamma \in]a, b[$ ist. Wir erhalten, da φ laut Annahme eine Lösung der Gleichung ist, mit der Kettenregel:

$$\dot{\varphi}_\gamma(t) = \dot{\varphi}(t + \gamma) = f(t + \gamma, \varphi(t + \gamma)) = f(t, \varphi_\gamma(t))$$

Also ist auch φ_γ eine Lösung der Gleichung.

„ \Leftarrow “: Seien alle Bezeichnungen wie zuvor. Wir müssen zeigen, dass für alle $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $f(\tau, y) = f(\sigma, y)$ gilt. Betrachte zunächst die beiden Anfangswertprobleme

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tau) = y, \quad \text{bzw.} \quad \dot{x} = f(t, x), \quad x(\sigma) = y.$$

Da die Gleichung den Voraussetzungen des Globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatzes genügt, besitzen diese eindeutige maximale Lösungen φ bzw. ψ . Laut Voraussetzung ist nun für $\gamma = \tau - \sigma$ auch φ_γ eine Lösung von $\dot{x} = f(t, x)$, und zwar zum Anfangswert $\varphi_\gamma(\sigma) = \varphi(\tau) = y$. Laut dem Globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz ist φ_γ somit eine Einschränkung von ψ . In einer Umgebung von σ gilt also

$$f(\sigma, y) = f(\sigma, \psi(\sigma)) = \dot{\psi}(\sigma) = \dot{\varphi}_\gamma(\sigma) = \dot{\varphi}(\tau) = f(\tau, \varphi(\tau)) = f(\tau, y).$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Herbst 2016, T3A5)

a (i) Die Nulllösung heißt asymptotisch stabil, wenn sie attraktiv und stabil ist. Dabei bedeutet stabil, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\tau \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jeden Anfangswert $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\|\xi\| < \delta$ die maximale Lösung $\lambda_{(\tau, \xi)}(t)$ für alle $t \geq \tau$ existiert und die Abschätzung $\|\lambda_{(\tau, \xi)}(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq \tau$ erfüllt. Ferner bedeutet attraktiv, dass diese maximale Lösung existiert und die Grenzwerteigenschaft $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\lambda_{(\tau, \xi)}(t)\| = 0$ erfüllt.

(ii) Die stationäre Nulllösung ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der totalen Ableitung $(Df)(0)$ negativen Realteil haben.

b Wir bezeichnen die rechte Seite der Gleichung als $f(x_1, x_2)$ und berechnen zunächst

$$(Df)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 + \cos x_2 \\ -2e^{x_1} + x_2^2 & -3 + 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ist

$$(Df)(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom $X(X + 3) + 2 = X^2 + 3X + 2$. Dessen Nullstellen berechnen sich zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}.$$

Die beiden Eigenwerte -1 und -2 sind beide negativ, also ist die stationäre Lösung 0 asymptotisch stabil.

Prüfungstermin: Frühjahr 2017

Thema Nr. 1 (Aufabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 198

6 Punkte

Es sei f eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 3$ gilt, $|f'(z)| \leq 1 + e^{-|z|}$.

Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 → S. 198

1 + 2 + 3 Punkte

a Es sei

$$X = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

der Abschluss der oberen Halbebene. Zeigen Sie, dass durch

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + iz - 2}$$

eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ohne Polstellen definiert ist.

b Zeigen Sie, dass $|f|$ auf X ein globales Maximum hat.

c Bestimmen Sie das globale Maximum von $|f|$ auf X und geben Sie alle Punkte an, an denen das globale Maximum angenommen wird. Begründen Sie, warum Ihre Antwort in der Tat das globale Maximum von $|f|$ auf X ist.

Aufgabe 3 → S. 199

3 + 3 Punkte

a Gibt es eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(1) = \pi$ und $f'(z) = |z|f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$?

b Zeigen Sie, dass es höchstens eine ganze Funktion f mit $f(0) = 2 + 3i$ gibt, sodass

$$f'(z) = \sin(z)f(z) + e^{z^2} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 4 → S. 200

2 + 4 Punkte

a Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt.$$

b Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \int_0^{\sin z} \sqrt{t^4 + 3z^2} dt$$

am Punkt $z = \pi$.

In beiden Aufgabenteilen muss klar ersichtlich sein, wie Sie zu Ihrem Ergebnis kommen.

Aufgabe 5 → S. 201

3 + 3 Punkte

a Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{6t}{1 + 3t^2} y + 5$$

Bestimmen Sie die maximale Lösung φ der Differentialgleichung zum Anfangswert $\varphi(0) = 2$. Vereinfachen Sie Ihre Antwort so weit wie möglich.

b Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{5} y^3 + t \arctan(t) - \frac{\pi t}{2}.$$

Zeigen Sie, dass für jede Lösung der Differentialgleichung mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = 0$ auch der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$ existiert, und bestimmen Sie diesen. Vereinfachen Sie Ihre Antwort so weit wie möglich.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 203

2 + 2 + 2 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$f_n, g_n: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n e^{-nx}, \quad g_n(x) = x^n e^{-x^n}.$$

- a** Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Untersuchen Sie, ob die Funktionen f_n und g_n auf $[0, \infty[$ Maximum und Minimum annehmen.
- b** Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, \infty[$ punktweise konvergieren. Bestimmen Sie die jeweilige Grenzfunktion f bzw. g .
- c** Welche der Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren auf $[0, \infty[$ gleichmäßig?

Aufgabe 2 → S. 204

1 + 1 + 2 + 2 Punkte

Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ derart, dass die Differentialgleichung

$$x' = f(x) \quad (*)$$

die Erhaltungsgrößen

$$V, W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad W(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3$$

besitzt. Zeigen Sie:

- a** Alle maximalen Lösungen von $(*)$ existieren auf ganz \mathbb{R} .
- b** $\bar{x} = 0$ ist eine stabile, stationäre Lösung von $(*)$.
- c** Für jede Lösung $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ von $(*)$ ist $t \mapsto x_3(t)$ konstant.
- d** Es gibt ein Vektorfeld f mit den obigen Eigenschaften, für welches zusätzlich die maximale Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(x)$, $x(0) = (1, 0, 0)$ periodisch und nicht konstant ist.

Aufgabe 3 → S. 205

1 + 4 + 1 Punkte

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (|x_2|^{1/2}, |x_1|^{1/2})$, und $D =]0, \infty[^2$. Zeigen Sie:

- a** Das Anfangswertproblem $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ ist für jedes $x_0 \in D$ lokal eindeutig lösbar.
- b** Es gibt genau eine Lösung $x: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$ mit $x(t) \in D$ für alle $t > 0$. **Hinweis** Die Trajektorie einer solchen Lösung ist der Graph einer Funktion, welche wieder eine Differentialgleichung erfüllt.
- c** Das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$ ist nicht eindeutig lösbar.

Aufgabe 4 → S. 207

3 + 3 Punkte

Sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.**a** Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 1 \text{ und } \forall z \in D : f'(z) = (f(z))^2.$$

b Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $g = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$, u und v reellwertig, mit

$$u(0) = v(0) = 0 \text{ und } \forall z \in D : \sin u(z) + iv(z) \cos v(z) = 0.$$

Aufgabe 5 → S. 208

6 Punkte

Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\partial_{x_1} f_1 = \partial_{x_2} f_2$ und $\partial_{x_2} f_1 = -\partial_{x_1} f_2$.
(ii) f ist auf $\{x \in U \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ unbeschränkt,
und auf $\{x \in U \mid |x_1| \leq 1, x_2 = 0\}$ beschränkt.

Zeigen Sie, dass es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Aufgabe 1 → S. 209

6 Punkte

Es seien $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom sowie $\gamma_{r,w}$ der positiv orientierte Rand der Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um $w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie für das komplexe Wegintegral:

$$\oint_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)} \, dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(w)}.$$

Aufgabe 2 → S. 210

2 + 2 + 2 Punkte

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung für $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

a Zeigen Sie, dass der Ursprung ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung ist.

- b** Geben Sie einen Wert $x(0) \in \mathbb{R}^2$ an, sodass die euklidische Norm $\|x(t)\|$ der Lösung x keine monotone Funktion der Zeit $t \in \mathbb{R}$ ist.
- c** Bestimmen Sie ein $\rho > 0$, sodass für jede Lösung x die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t) = x_1(t)^2 + \rho x_2(t)^2$ monoton in der Zeit $t \in \mathbb{R}$ ist.

Hinweis Zum Lösen der Aufgaben muss die allgemeine Lösung der Differentialgleichung nicht angegeben werden.

Aufgabe 3 → S. 211

6 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = x + y^2$. Bestimmen Sie für jedes $r > 0$ die Menge aller kritischen Punkte von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = r^2$ und geben Sie mit Begründung an, ob es sich bei diesen um lokale Maxima oder Minima handelt.

Aufgabe 4 → S. 212

2 + 4 Punkte

Im Folgenden sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine integrable Funktion.

- a** Formulieren Sie den Transformationssatz für Integrale im Spezialfall, dass Sie das Integral von $f \circ T$ zurückführen auf das Integral über f , wobei die Transformation $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine *lineare* Abbildung ist.
- b** Integrieren Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(1 + (x_1 + x_2)^2)(1 + (2x_1 + 5x_2)^2)}$$

über \mathbb{R}^2 .

Aufgabe 5 → S. 213

2 + 2 + 2 Punkte

Gegeben ist die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n^2 x^2}.$$

Beweisen Sie:

- a** f_n konvergiert auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen 0.
- b** $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{\pi}{2}$.
- c** Für jeden Parameter $\alpha \in (0, 1)$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^\alpha f_n(x) dx = 0$.

Lösungen zu Thema Nr. 1

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T1A1)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $e^{-|z|} \leq 1$ und somit die Abschätzung

$$|f'(z)| \leq 1 + e^{-|z|} \leq 2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus B_3(0). \quad (\star)$$

Aufgrund des Maximumsprinzips für beschränkte Gebiete gibt es außerdem ein $z_0 \in \partial B_3(0)$, sodass

$$|f'(z)| \leq |f'(z_0)| \leq 2 \quad \text{für alle } z \in B_3(0),$$

wobei wir verwendet haben, dass auch z_0 die Abschätzung (\star) aus der Angabe erfüllt. Insgesamt ist damit f' beschränkt. Da mit f auch f' eine ganze Funktion ist, folgt mit dem Satz von Liouville, dass $f'(z) = a$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und ein $a \in \mathbb{C}$ gilt. Als ganze Funktion hat f (bzw f') eine auf ganz \mathbb{C} gültige Potenzreihendarstellung der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{bzw.} \quad f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}.$$

Wegen $f'(z) = a$ für $z \in \mathbb{C}$ folgt $a_k = 0$ für $k > 2$ und $a_1 = a$. Damit wird f zu

$$f(z) = a_0 + az$$

und mit $b = a_0$ ist die geforderte Gleichung gezeigt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T1A2)

a Man berechnet

$$z^2 + iz - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-i \pm \sqrt{-1+8}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Da der Imaginärteil aller Nennernullstellen negativ ist, liegen diese nicht in X und f hat auf X keine Singularitäten.

b Wir berechnen für $z = x + iy$ mit $y \geq 0$ das Betragsquadrat des Nenners zu

$$\begin{aligned}
 |z^2 + iz - 2|^2 &= |(x + iy)^2 + i(x + iy) - 2|^2 = \\
 &= (x^2 - y^2 - (y + 2))^2 + (2xy + x)^2 = \\
 &= (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)(y + 2) + (y + 2)^2 + 4x^2y^2 + 4x^2y + x^2 = \\
 &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2yx^2 - 4x^2 + 2y^3 + 4y^2 + \\
 &\quad + y^2 + 4y + 4 + 4x^2y^2 + 4x^2y + x^2 = \\
 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2yx^2 - 3x^2 + y^3 + 5y^2 + 4y + 4 \geq \\
 &\geq x^4 - 3x^2 + 4 = (x^2 - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$|f(z)| \leq \frac{2}{\sqrt{7}} \quad \text{für alle } z \in X.$$

Wegen $\left|f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{7}}$ wird der maximale Wert auch angenommen, d. h. $\frac{2}{\sqrt{7}}$ ist ein globales Maximum von $|f|$ auf X .

c Nehmen wir an, dass $x + iy \in X$ ein Maximum des Betrags ist. Die obige Ungleichung ist für $y > 0$ oder $x^2 \neq \frac{3}{2}$ strikt, also kommen nur die beiden Punkte $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ infrage. Einsetzen zeigt, dass diese auch tatsächlich beide ein Extremum sind.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T1A3)

a Angenommen, es gibt so eine ganze Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dann wäre auch $f': \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganz und insbesondere die Einschränkung $f'|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$ holomorph, müsste also auf ihrem Definitionsbereich die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen. Unter Verwendung von $\partial_x |z| = \frac{x}{|z|}$ und $\partial_y |z| = \frac{y}{|z|}$ für $z \neq 0$ lautet die erste davon:

$$\begin{aligned}
 \partial_x \operatorname{Re} f'(z) &= \partial_x \operatorname{Re} (|z|f(z)) = \frac{x \operatorname{Re} f(z)}{|z|} + |z| \partial_x \operatorname{Re} f(z) = \\
 &\stackrel{!}{=} \frac{y \operatorname{Im} f(z)}{|z|} + |z| \partial_y \operatorname{Im} f(z) = \partial_y \operatorname{Im} (|z|f(z)) = \partial_y \operatorname{Im} f'(z)
 \end{aligned}$$

Da f selbst holomorph ist und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt, reduziert sich obige Gleichung für $z \neq 0$ auf

$$x \operatorname{Re} f(z) = y \operatorname{Im} f(z).$$

Verwendet man nun $f(1) = \pi$, um diese Gleichung bei 1 auszuwerten, erhält man $\pi = 0$. Der Widerspruch zeigt, dass f zumindest in 1 nicht holomorph sein kann. Insbesondere kann f keine ganze Funktion sein.

b Seien f_1 und f_2 zwei Funktionen mit den angegebenen Eigenschaften. Dann gilt für die ganze Funktion $g = f_1 - f_2$

$$g'(z) = f_1'(z) - f_2'(z) = \sin(z)(f_1(z) - f_2(z)) = \sin(z)g(z), \quad g(0) = 0.$$

Betrachte nun die Abbildung $h(z) = g(z)e^{\cos z}$. Auch diese ist eine ganze Funktion und es gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$h'(z) = g'(z)e^{\cos z} - g(z)e^{\cos z} \sin z = \sin(z) \cdot g(z)e^{\cos z} - g(z)e^{\cos z} \sin(z) = 0.$$

Also ist h konstant, wegen $h(0) = 0$ ist somit $h(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, folgt daraus $g(z) = 0$ und somit $f_1 = f_2$.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T1A4)

a Laut dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\frac{d}{dx} \int_0^x e^{t^2} dt = e^{x^2}.$$

Mit der Kettenregel folgt daraus

$$f'(x) = e^{\sin^2(x)} \cdot \cos x.$$

b Definiere zunächst die Funktion

$$\hat{g}(y, z): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (y, z) \mapsto \int_0^{\sin z} \sqrt{t^4 + 3y^2} dy,$$

dann gilt nach der Kettenregel:

$$g'(z) = \frac{d}{dz} \hat{g}(z, z) = (\nabla \hat{g}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie berechnen daher (wie in **a**):

$$\partial_z \hat{g}(y, z) = \frac{d}{dz} \int_0^{\sin z} \sqrt{t^4 + 3y^2} dt = \sqrt{\sin^4(z) + 3y^2} \cdot \cos z$$

Um $\partial_y \hat{g}(y, z)$ berechnen zu können, wenden wir zunächst den Satz über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen an: Es gilt

$$\partial_y \sqrt{t^4 + 3y^2} = \frac{3y}{\sqrt{t^4 + 3y^2}},$$

also ist die Funktion $(y, t) \mapsto \sqrt{t^4 + 3y^2}$ für $t \neq 0$ stetig partiell differenzierbar nach y , außerdem stetig in t . Da wir uns am Ende für die Ableitung von g an der Stelle $z = \pi$ interessieren, können wir uns außerdem auf $y \in [3, 4]$ beschränken. In diesem Fall ist nämlich

$$\partial_y \sqrt{t^4 + 3y^2} = \frac{3y}{\sqrt{t^4 + 3y^2}} \leq \frac{12}{\sqrt{0 + 27}},$$

d. h. der Integrand besitzt integrierbare Majorante. Wir können nun Ableitung und Integration vertauschen:

$$\partial_y \hat{g}(y, z) = \partial_y \int_0^{\sin z} \sqrt{t^4 + 3y^2} dt = \int_0^{\sin z} \partial_y \sqrt{t^4 + 3y^2} dt.$$

Wertet man $\partial_y \hat{g}(y, z)$ an der Stelle (π, π) aus, erhält man auf jeden Fall 0, da von 0 bis 0 integriert wird. Insgesamt folgt:

$$g'(\pi) = \partial_z \hat{g}(\pi, \pi) + (\partial_y \hat{g})(\pi, \pi) = \sqrt{\sin^4(\pi) + 3\pi^2} \cdot \cos \pi + 0 = -\pi\sqrt{3}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T1A5)

a Die Lösungsformel aus der Variation der Konstanten ergibt zunächst

$$2 \exp\left(\int_0^t \frac{6s}{1+3s^2} ds\right) + \exp\left(\int_0^t \frac{6s}{1+3s^2} ds\right) \int_0^s \exp\left(-\int_0^s \frac{6r}{1+3r^2} ds\right) 5 ds.$$

Nun gilt

$$\int_0^t \frac{6s}{1+3s^2} ds = \left[\ln(1+3s^2)\right]_0^t = \ln(1+3t^2).$$

Damit erhalten wir

$$\varphi(t) = 2(1 + 3t^2) + (1 + 3t^2) \int_0^t \frac{5}{1 + 3s^2} ds.$$

Mittels Substitution erhalten wir für das hintere Integral

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{5}{1 + 3s^2} ds &= \int_0^{\sqrt{3}t} \frac{5}{\sqrt{3}(1 + s^2)} ds = \frac{5}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}t} \frac{1}{1 + s^2} ds = \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}} [\arctan s]_0^{\sqrt{3}t} = \frac{5}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}t). \end{aligned}$$

Die Lösung ist somit

$$\varphi(t) = 2 + 6t^2 + \frac{5}{\sqrt{3}}(1 + 3t^2) \arctan(\sqrt{3}t).$$

Man überprüft unmittelbar, dass diese Funktion das Anfangsproblem löst. Da φ auf ganz \mathbb{R} definiert ist, handelt es sich außerdem um die maximale Lösung.

b Wir bestimmen mit der Regel von l'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t \left(\arctan t - \frac{\pi}{2} \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\arctan t - \frac{\pi}{2}}{t^{-1}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 + t^2)^{-1}}{-t^{-2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t^2}{1 + t^2} = -1. \end{aligned}$$

Ist nun $y(t)$ eine Lösung der Gleichung, so gilt

$$y(t)^3 = 5 \cdot \left[y'(t) - t \left(\arctan(t) - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

und wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0$ konvergiert die rechte Seite der Gleichung. Aufgrund der Stetigkeit von $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ folgt daraus die Konvergenz von $y(t)$. Um den Grenzwert zu bestimmen, betrachte:

$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \right)^3 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)^3 = 5[0 - (-1)] = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \sqrt[3]{5}.$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T2A1)

- a** Es gilt $f_n(0) = g_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $f_n(x), g_n(x) > 0$ für $x \in]0, \infty[$. Also ist 0 ein Minimum von f_n und g_n auf $[0, \infty[$. Zur Untersuchung auf Maxima berechne zunächst

$$f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-nx} + x^n e^{-nx}(-n) = nx^{n-1}e^{-nx}(1-x).$$

Damit hat f'_n eine Nullstelle bei $x = 1$. Da der erste Faktor stets positiv ist, gilt $f'(x) > 0$ für $x < 1$ und $f'(x) < 0$ für $x > 1$, sodass an der Stelle $x = 1$ ein Maximum vorliegt. Der zugehörige Funktionswert berechnet sich zu $f_n(1) = e^{-n}$.

Analog verfahren wir für g_n und erhalten

$$g'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x^n} + x^n e^{-x^n}(-nx^{n-1}) = nx^{n-1}e^{-x^n}(1-x^n).$$

Neben der schon behandelten Nullstelle bei 0, hat auch g'_n nur die Nullstelle $x = 1$ und aus dem gleichen Grund wie zuvor liegt dort ein Maximum mit Funktionswert $g_n(1) = e^{-1}$ vor.

- b** Wir zeigen zunächst, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Sei dazu $x \in [0, \infty[$. Die Abschätzungen aus Teil **a** zeigen, dass $xe^{-x} = f_1(x) \leq e^{-n} < 1$ gilt. Daher erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} (xe^{-x})^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n^2} = 0.$$

Da das Maximum von g_n konstant bei e^{-1} lag, kann $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen die Nullfunktion konvergieren. Wir zeigen stattdessen, dass $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen

$$g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-1} & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

konvergiert. Für $x = 1$ ist dies klar. Für $x < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ und daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-x^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 = g(x).$$

Für $x > 1$ schließlich erhalten wir wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0 = g(x).$$

- c** Das Argument aus Teil **b** zeigt bereits, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $e^{-N} < \varepsilon$. Es gilt dann für $x \in [0, \infty[$ und $n \geq N$

$$f_n(x) \leq f_n(1) = e^{-n} \leq e^{-N} < \varepsilon.$$

Würde die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergieren, so würde aus der Stetigkeit von g_n auch die Stetigkeit der Grenzfunktion g folgen. Jedoch haben wir bereits in **b** gesehen, dass g nicht stetig ist.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T2A2)

- a** Da f nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist, ist f nach Proposition 7.10 auch lokal Lipschitz-stetig. Da die Differentialgleichung $x' = f(x)$ auf dem Gebiet \mathbb{R}^3 definiert ist, gibt es nach dem Globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz 7.12 eine eindeutige maximale Lösung $\lambda:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ zu jedem Anfangswert $\lambda(\tau) = \zeta$.

Nehmen wir an, es ist $a > -\infty$, dann muss wegen $\partial\mathbb{R}^3 = \emptyset$ laut Satz 7.13 die Bedingung $\lim_{t \searrow a} \|\lambda(t)\| = \infty$ gelten. Insbesondere wäre dann

$$\lim_{t \searrow a} V(\lambda(t)) = \lim_{t \searrow a} \|\lambda(t)\|^2 = \infty.$$

Jedoch ist V laut Angabe eine Erhaltungsgröße für die Differentialgleichung $x' = f(x)$, sodass

$$\lim_{t \searrow a} V(\lambda(t)) = \lim_{t \searrow a} V(\lambda(\frac{a+b}{2})) = V(\lambda(\frac{a+b}{2})) < \infty$$

gilt. Die einzige Möglichkeit ist daher $a = -\infty$ und genauso zeigt man $b = \infty$. Insgesamt ist dann λ auf ganz \mathbb{R} definiert.

- b** Wir zeigen die Stabilität der Nulllösung direkt anhand der Definition. Seien dazu $\varepsilon > 0$ und $\tau \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Nach Teil **a** existiert für jeden Anfangswert $\zeta \in \mathbb{R}^3$ die maximale Lösung $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ zum Anfangswert $\lambda(\tau) = \zeta$, also insbesondere diejenige zu den Anfangswerten ζ mit $\|\zeta\| < \varepsilon$. Da V eine Erhaltungsgröße für $x' = f(x)$ ist, haben wir

$$\|\lambda(t) - 0\| = \|\lambda(t)\| = \sqrt{V(\lambda(t))} = \sqrt{V(\lambda(\tau))} = \sqrt{\|\zeta\|^2} = \|\zeta\| < \varepsilon$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

- c** Da $V(x(t))$ und $W(x(t))$ für jede Lösung $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ konstant sind, ist auch

$$x_3^2(t) - 2x_3(t) = V(x(t)) - W(x(t)) =: c$$

konstant. Diese quadratische Gleichung für $x_3(t)$ hat genau zwei diskrete Lösungen. Da $x_3(t)$ stetig ist, kann nur eine davon angenommen werden, d. h. $x_3(t)$ ist konstant.

- d** Sei $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die maximale Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$ zum Anfangswert $x(0) = (1, 0, 0)$ mit dem zu bestimmenden Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Nach Teil **c** folgt aus $\lambda_3(0) = 0$ sogar $\lambda_3(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen

$$V(\lambda(t)) = \lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) = \text{const.}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ muss sich λ auf einer Kreisbahn bewegen. Ein mögliches λ ist daher die periodische und nicht-konstante Funktion

$$\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t, 0).$$

Die zugehörige Differentialgleichung ist

$$x'_1 = -x_2, \quad x'_2 = x_1, \quad x'_3 = 0,$$

was dem Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_2, x_1, 0)$$

entspricht.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T2A3)

- a** Der Definitionsbereich der Gleichung ist mit $\mathbb{R} \times D$ ein Gebiet, die Funktion f ist als Verkettung stetiger Funktionen auf \mathbb{R}^2 stetig. Für $x_1, x_2 > 0$ gilt ferner $f(x, y) = (x_2^{1/2}, x_1^{1/2})$ und damit

$$(Df)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}x_2^{-1/2} \\ \frac{1}{2}x_1^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Da alle Einträge dieser Jacobi-Matrix stetig sind, ist $f|_D$ stetig differenzierbar, also Lipschitz-stetig. Deshalb folgt die Behauptung aus dem Globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

- b** Sei $x: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit $x(0) = 0$ und $x(t) \in D$ für $t > 0$. Laut dem Hinweis ist dann die Trajektorie dieser Lösung als Graph einer Funktion darstellbar, d. h. es gibt eine Funktion $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

mit $g(x_2(t)) = x_1(t)$ für alle $t \geq 0$. Es gilt dann nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{dg(x_2(t))}{dt} = g'(x_2(t)) \cdot \dot{x}_2(t) \\ \Leftrightarrow g'(x_2(t)) &= \frac{\dot{x}_1(t)}{\dot{x}_2(t)} = \left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right)^{1/2} = \left(\frac{x_2(t)}{g(x_2(t))}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Die Funktion g ist also Lösung der Differentialgleichung $y' = \left(\frac{x_2}{y}\right)^{1/2}$ zu einem Anfangswert $y(x_2(\tau)) = x_1(\tau)$ für ein $\tau > 0$. Diese Differentialgleichung ist auf dem Gebiet D definiert, außerdem ist die rechte Seite wegen

$$\partial_y \left(\frac{x_2}{y}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x_2}{y}}} \cdot \frac{-x_2}{y^2}$$

auf D partiell stetig differenzierbar, also nach Proposition 7.10 lokal Lipschitz-stetig bezüglich y . Nach dem Globalen Existenz- und Eindeigkeitsatz besitzt das Anfangswertproblem daher eine eindeutige maximale Lösung. Diese Lösung bestimmen wir nun mittels Trennen der Variablen:

$$\begin{aligned}\int_{x_1(\tau)}^{g(x_2)} y^{1/2} dy &= \int_{\tau}^{x_2} \omega^{1/2} d\omega \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(g(x_2)^{3/2} - x_1(\tau)^{3/2}\right) &= \frac{2}{3} \left(x_2^{3/2} - \tau^{3/2}\right) \\ \Leftrightarrow g(x_2) &= \left(x_2^{3/2} - \tau^{3/2} + x_1(\tau)^{3/2}\right)^{2/3}\end{aligned}$$

Diese Lösung ist auf ganz $[0, \infty[$ definiert und deshalb die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems. Wir wollen eigentlich, dass $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$, also $g(0) = 0$. Einsetzen dieser Bedingung liefert $\tau = x_1(\tau)$, sodass $g(x_1) = x_2$.

Wir haben also gezeigt, dass für jede Lösung x mit den genannten Eigenschaften $x_1(t) = x_2(t)$ für alle $t \geq 0$ gelten muss. Die ursprüngliche Differentialgleichung reduziert sich daher für diese Lösung auf

$$\dot{x}_1(t) = \sqrt{x_1(t)}.$$

Diese Differentialgleichung ist wieder auf dem Gebiet D definiert und die rechte Seite dort stetig partiell differenzierbar nach x_1 . Laut Globalen Existenz und Eindeigkeitsatz gibt es daher zu jedem Anfangswert eine eindeutige maximale Lösung. Wie oben berechnet man diese mittels

Trennen der Variablen zu

$$x_1(t) = \left(\frac{1}{2}(t - \tau) + \sqrt{x_1(\tau)} \right)^2.$$

Die Bedingung $x_1(0) = 0$ erzwingt $x_1(t) = \frac{1}{2}t^2$, also ist die eindeutige Lösung mit den gewünschten Eigenschaften die Abbildung

$$x : [0, \infty[\rightarrow D, \quad t \mapsto \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^2 \right).$$

- c** Sei λ die Lösung aus Teil **b**. Dann ist λ eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems. Ferner ist aber auch $\mu(t) = 0$ eine Lösung, denn es ist

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |0|^{1/2} \\ |0|^{1/2} \end{pmatrix} = f(0).$$

Wegen $\lambda(t) \neq 0$ für alle $t > 0$ sind diese beiden Lösungen nicht identisch, das Anfangswertproblem ist also nicht eindeutig lösbar.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T2A4)

- a** Wir beweisen per vollständiger Induktion, dass $f^{(n)}(0) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Der Induktionsanfang ergibt sich direkt aus $f'(0) = f(0)^2 = 1$. Nehmen wir an, die Gleichung ist für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Mithilfe der verallgemeinerten Produktregel (Leibniz'sche Regel) erhalten wir zunächst

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{d}{dz^n} f'(z) = \frac{d}{dz^n} f(z)f(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(z)f^{(n-k)}(z).$$

Einsetzen der Induktionsvoraussetzung liefert nun

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(0)f^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k!(n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^n n! = (n+1)!. \end{aligned}$$

Somit ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Tatsächlich prüft man unmittelbar, dass diese Funktion die geforderten Bedingungen erfüllt.

b Laut Voraussetzung sind u und v reellwertig. Aus der angegebenen Gleichung und der Eindeutigkeit von Real- und Imaginärteil folgt also, dass für $z \in D$

$$\sin u(z) = 0 = v(z) \cos v(z)$$

gelten muss. Aus der ersten Gleichung folgt $u(z) \subseteq \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Damit kann das Bild $g(D)$ jedoch nicht offen (also kein Gebiet) sein, denn für jedes $k \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon < \pi$ liegt $k\pi + \varepsilon$ nicht in der Menge. Laut dem Satz von der Gebietstreue muss g damit konstant sein. Zusammen mit dem Anfangswert erhalten wir $g(z) = 0$ für alle $z \in D$. Wiederum prüft man unmittelbar, dass diese Funktion die Bedingungen erfüllt.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T2A5)

Wir betrachten die komplexe Funktion

$$g: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x + iy \mapsto f_1(x, y) + if_2(x, y).$$

Die Bedingung (i) entspricht genau den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für g , sodass g holomorph ist. Wir untersuchen nun den Typ der Singularität 0. Wäre 0 hebbar, so gäbe es eine holomorphe Fortsetzung auf \mathbb{C} und diese würde auf der kompakten Menge $\overline{\mathbb{E}}$ ein Maximum annehmen – Widerspruch dazu, dass f auf $\overline{\mathbb{E}}$ unbeschränkt ist.

Zudem ist $z_n = \frac{1}{n}$ eine Folge in U_2 mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, entlang derer f laut Bedingung (ii) beschränkt bleibt, also ist

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \neq \infty.$$

Dies zeigt, dass 0 auch keine Polstelle von f ist. Deshalb muss 0 eine wesentliche Singularität sein.

Wir folgern nun die Existenz einer Folge mit den geforderten Eigenschaften aus dem Satz von Casorati-Weierstraß: Sei dazu $n \in \mathbb{N}$. Laut dem Satz ist das Bild von $B_{\frac{1}{n}}(0)$ dicht in \mathbb{C} , d. h. es gibt ein $z_n \in B_{\frac{1}{n}}(0)$, sodass $|f(z_n) - 0| < \frac{1}{n}$ gilt. Die komplexe Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt nun $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$. Definiere die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $x_n = (\operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$, so hat diese die verlangten Eigenschaften.

Lösungen zu Thema Nr. 3

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T3A1)

Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$. Nach Definition ist die Kurve $\gamma_{r,w}$ gegeben durch

$$\gamma_{r,w}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto w + re^{it}.$$

Damit berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)} \, dz &= \int_{\gamma_{r,w}} \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \cdot \overline{z^k} \, dz = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^n \overline{a_k} (\overline{w} + re^{-it})^k \right) \cdot ire^{it} \, dt = \\ &= \sum_{k=0}^n ir \overline{a_k} \int_0^{2\pi} (\overline{w} + re^{-it})^k \cdot e^{it} \, dt = \\ &= \sum_{k=0}^n ir \overline{a_k} \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \overline{w}^{k-l} \cdot (re^{-it})^l \cdot e^{it} \, dt = \\ &= \sum_{k=0}^n ir \overline{a_k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \overline{w}^{k-l} r^l \int_0^{2\pi} e^{-i(l-1)t} \, dt \end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral zunächst für den Fall $l \neq 1$, denn in diesem Fall ist $l-1 \neq 0$, sodass

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(l-1)t} \, dt = \left[\frac{i}{l-1} e^{-i(l-1)t} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

In der Summe oben fallen alle Summanden mit $l \neq 1$ weg und übrig bleibt:

$$\sum_{k=0}^n ir \overline{a_k} \binom{k}{1} \overline{w}^{k-1} r \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi ir^2 \sum_{k=0}^n \overline{a_k} k \overline{w}^{k-1} = 2\pi ir^2 \overline{p'(w)}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T3A2)

- a** Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix ist $\chi_a = X^2 + 2X + 5$. Die Eigenwerte der Matrix sind daher

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Da alle Eigenwerte negativen Realteil haben, ist die Nulllösung laut Satz 7.29 asymptotisch stabil.

- b** Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} (x_1^2(t) + x_2^2(t)) = 2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t) = \\ &= 2(x_1(-x_1 - x_2) + x_2(4x_1 - x_2)) = \\ &= 2(-x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2) \end{aligned}$$

Wählen wir beispielsweise $x(0) = (1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$, so hat die Ableitung von $\|x(t)\|^2$ mindestens eine Nullstelle. Damit kann $\|x(t)\|^2$ nur monoton sein, falls $\|x(t)\|$ konstant ist, d. h. $\|x(t)\| = \|(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist diese Lösung x nicht attraktiv im Widerspruch dazu, dass nach **a** der Ursprung eine asymptotisch stabile Ruhelage ist, alle Lösungen also asymptotisch stabil sind. Der Betrag von $x(t)$ kann daher nicht konstant bleiben.

- c** Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= \frac{d}{dt} (x_1^2(t) + \rho x_2^2(t)) = 2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2\rho x_2(t)\dot{x}_2(t) = \\ &= 2(x_1(-x_1 - x_2) + \rho x_2(4x_1 - x_2)) = \\ &= 2(-x_1^2 + (-1 + 4\rho)x_1x_2 - \rho x_2^2) \end{aligned}$$

Wähle $\rho = \frac{1}{4}$, dann gilt also

$$\dot{f}(t) = -2(x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2) \leq 0,$$

d. h. die Funktion f ist monoton fallend.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T3A3)

Die Menge $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ ist die Nullstellenmenge der Funktion $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$. Diese ist eine stetig differenzierbare Funktion mit Gradienten

$$(\nabla\varphi)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Dieser verschwindet nur im Punkt $(0, 0) \notin K$, also bildet K eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 . Laut dem Satz über Extrema unter Nebenbedingungen ist (x, y) nur dann ein Extremum, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$(\nabla\varphi)(x, y) = \lambda(\nabla f)(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Die erste Gleichung liefert $\lambda = 2x$ und eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt dies

$$2y = (2x)2y \quad \Leftrightarrow \quad 2y(1 - 2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{2}.$$

Im Fall $y = 0$ erhalten wir mittels der definierenden Gleichung von K , dass $x = \pm r$ sein muss. Nur im Fall $r \geq \frac{1}{2}$ liefert die zweite Lösung überhaupt einen Punkt in der Menge K , der sich dann zu

$$\frac{1}{4} + y^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}$$

berechnet. Die Menge der kritischen Punkte ist also

$$\begin{aligned} &\{(\pm r, 0)\} && \text{falls } r < \frac{1}{2} \\ &\left\{(\pm r, 0), \left(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}\right)\right\} && \text{falls } r \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Um zu sehen, wo ein globales Extremum vorliegt, berechnen wir die zugehörigen Funktionswerte:

$$f(r, 0) = r, \quad f(-r, 0) = -r, \quad f\left(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}\right) = r^2 + \frac{1}{4}$$

Das Minimum ist damit $-r$ und wird an der Stelle $(-r, 0) \in K$ angenommen. Ferner gilt für alle $r > 0$

$$r^2 - r + \frac{1}{4} = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + \frac{1}{4} \geq r,$$

und Gleichheit genau für $r = \frac{1}{2}$. Im Fall $r = \frac{1}{2}$ gilt jedoch $f(r, 0) = f\left(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}\right)$. Also gilt allgemein: das Maximum ist $r^2 + \frac{1}{4}$ und wird an den Stellen $\left(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}\right)$ angenommen.

Alternative: Ohne den Satz über Extrema unter Nebenbedingungen kommt man aus, wenn man für K die Parametrisierung

$$\phi: [0, 2\pi[\rightarrow K, t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$$

wählt. Die Verkettung $f \circ \phi$ ist eine reellwertige auf $[0, 2\pi[$ definierte Funktion und kann entsprechend mit den Mitteln der Analysis einer reeller Variablen auf Extrema untersucht werden. Es ergeben sich Hochpunkte bei $t = \arccos\left(\frac{1}{2r}\right)$ und $t = 0$ sowie ein Tiefpunkt bei $t = \pi$. Einsetzen der Werte in $f \circ \phi$ gibt die Minima und Maxima und Einsetzen in ϕ die zugehörigen Stellen, an denen diese angenommen werden.

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T3A4)

- a** Sei T eine injektive lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und f wie angegeben. Die Voraussetzung, dass T ein Diffeomorphismus ist, ist genau dann erfüllt, wenn die Darstellungsmatrix A von T bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^2 invertierbar ist, denn dann ist T bijektiv mit differenzierbarer Umkehrung $x \mapsto A^{-1}x$. Ferner ist dann $(DT)(x, y) = A$ sowie $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, aufgrund der Bijektivität. Der allgemeine Transformationssatz 5.10 liefert unter diesen Voraussetzungen

$$\int_{\mathbb{R}^2} (f \circ T)(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) |\det A|^{-1} \, dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \, dx.$$

- b** Definiere

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung zeigt, dass T linear ist, und da die Darstellungsmatrix Determinante 3 hat, handelt es sich um eine bijektive Transformation. Mit

Teil **a** erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1 + (x_1 + x_2)^2(1 + (2x_1 + 5x_2)^2)} dx = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)} dx.$$

Mit dem Satz von Fubini und unter Verwendung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \pi$$

berechnet sich das hintere Integral zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)} dx_1 dx_2 &= \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x_2^2)} dx_2 \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x_1^2)} dx_1 \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \pi = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zur Aufgabe (Frühjahr 2017, T3A5)

a Sei $x \in]0, 1[$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x^2 N > \frac{1}{\varepsilon}$ ist, dann gilt für $n \geq N$

$$|f_n(x)| = \frac{n}{1 + n^2 x^2} = \frac{1}{\frac{1}{n} + n x^2} \leq \frac{1}{n x^2} \leq \frac{1}{N x^2} < \varepsilon.$$

Also konvergiert f_n punktweise gegen 0. Nehmen wir an, f_n konvergiert gleichmäßig gegen 0. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ und $x \in]0, 1[$ die Ungleichung $|f_n(x)| < \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Betrachte nun aber $\hat{x} = \frac{1}{N}$. Es gilt

$$f_N(\hat{x}) = \frac{N}{1 + \frac{N^2}{N^2}} = \frac{N}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

b Mittels der Substitution $x \mapsto \frac{x}{n}$ erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{n}{1 + n^2 x^2} dx = \int_0^n \frac{1}{1 + x^2} dx = [\arctan(x)]_0^n = \arctan(n).$$

Daraus folgt wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ die Aussage.

c Die gleiche Substitution wie in Teil **b** liefert hier

$$\int_0^1 \frac{nx^\alpha}{1+n^2x^2} dx = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^n \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx = \frac{1}{n^\alpha} \left(\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx + \int_1^n \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx \right)$$

Für alle $x \geq 1$ gilt $x^\alpha \leq x$, deshalb können wir das zweite Integral folgendermaßen abschätzen:

$$\int_1^n \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx \leq \int_1^n \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_1^n = \frac{1}{2} \ln(1+n^2) - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Das andere auftretende Integral können wir ebenfalls abschätzen:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1} dx = 1.$$

Insgesamt erhält man daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^\alpha}{1+(nx)^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(1+n^2) \right) = 0,$$

wobei wir verwendet haben, dass aufgrund der Regel von L'Hospital der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \ln(1+n^2)}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n^2} \cdot \frac{1}{\alpha n^{\alpha-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2-\alpha}}{\alpha(1+n^2)} = 0$$

ist.